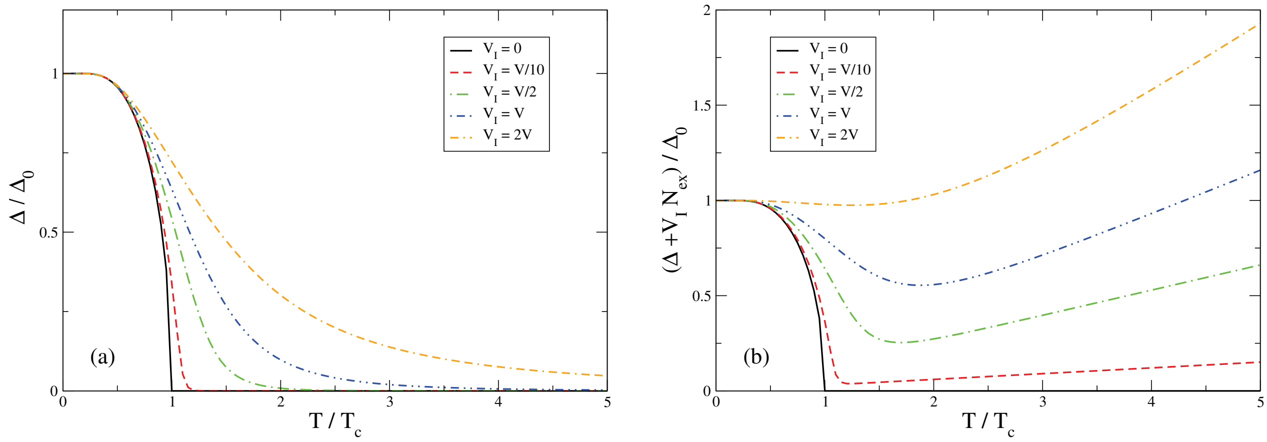

Figure 9: Energia de gap normalizata, ca functie de T/T_c, pentru cuasiparticulele FES (a) si Landau (b): Δ/Δ_0 (Eq. 28) si $(\Delta + V_I N_{ex})/\Delta_0$ (Eq. 30). Curba neagra din fiecare figura corespunde energiei de gap BCS, adica este calculata pentru $V_I = 0$. T_c este temperatura critica BCS.

5 Aplicatii ale statisticii fractionare de excluziune in cadrul sistemelor cu dezordine

Utilizand metoda statisticii fractionare de excluziune (FES) in contextul simularilor Monte Carlo analizam diferite sisteme cu dezordine: *Fermi glass* (FG) si *Coulomb glass* (CG), la care se poate adauga si sistemul de tip *Bose glass* (BG), cat si o varianta propusa de sistem vitros, ce include interactii repuslsive cat si atractive. Aceste sisteme sunt reunite in cadrul formalismului sub numele de *FES glasses*.

Sistemele sunt analizate prin comparatie un sistem uniform de fermioni fara interactie (UN), avand o densitate constanta de stari. Sistemul FG este de asemenea fara interactie, insa densitatea de stari prezinta in distributia spatiala doua valori σ_l si σ_h, dispuse arbitrar. In continuare, sistemul CG este construit avand la baza sistemul FG, la care se adauga o interactie repulsiva de scurta distanta. In plus, consideram un sistem in care interactiile sunt mixte, repulsiv-atractive, denumit in continuare generic *FES glass* (FESG).

Vom utiliza ratele de tranzitie dezvoltate anterior:

$$\Gamma_{\Phi\Upsilon} \sim n_{\xi i}(1 + n_{\eta j} - A_{\eta j}) \prod_{(\zeta,k)} [1 + n_{\zeta k} - A_{\zeta k}]^{-\alpha_{\eta j,\zeta k}} \prod_{(\zeta,k)} [1 - A_{\zeta k}]^{\alpha_{\eta j,\zeta k}}, \tag{32}$$

unde $A_{\xi i} = \sum_{\eta,j} \alpha_{\xi i,\eta j} n_{\eta j}$. Se poate observa ca in cazul unui sistem omogen cu parametrii statistici diagonali, $\alpha_{\xi i,\eta j} = \alpha \delta_{\xi\eta}\delta_{ij}$, se recupereaza ratele de tranzitie indicate in [J. Stat. Mech. P09011 (2010)]:

$$\Gamma_{\Phi\Upsilon}(\alpha) \sim n_{\xi i}(1 - \alpha n_{\eta j})^{\alpha}[1 + (1 - \alpha) n_{\eta j}]^{1-\alpha}. \tag{33}$$

Ratele de tranzitie in ecuatia (32) reprezinta probabilitate de *salt*, adica probabilitatea pentru ca o particula din specia (ξ, i) sa efectueze un salt in specia (η, j). Odata ce specia de destinatie este stabilita, mutarea este *acceptata* cu o probabilitate proportionala cu factorul Boltzmann, adica $\sim \min[1, \exp(-(E_\Phi - E_\Upsilon)/k_B T)]$.

Evolutia temporala a domeniilor, caracterizate de acumularea particulelor intr-o anumita regiune si corespunzator golirea altor regiuni, este descrisa de functiile de corelatie spatiala si

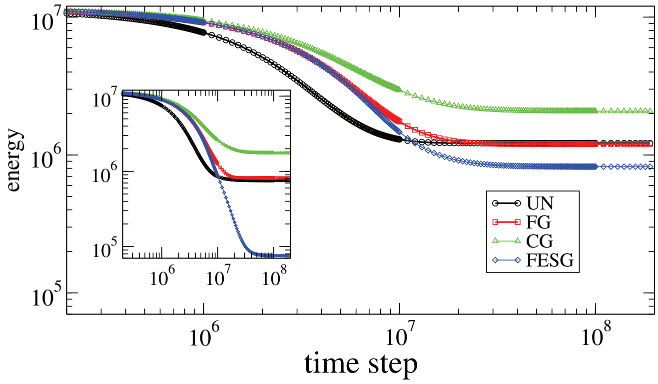

Figure 10: Relaxarea energiei totale pentru sistemele UN, FG, CG si FESG, la doua temperaturi diferite, $T_1 = 0.5E_F/k_B$ (grafic principal) si $T_2 = 0.05E_F/k_B$ (inset).

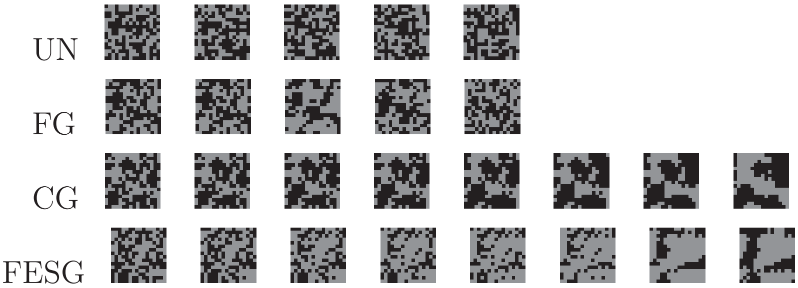

Figure 11: Evolutia domeniilor in timp, comparativ pentru UN, FG, CG si FESG la $T = 0.5$. Scalele de timp t_w sunt urmatoarele: $6 \cdot 10^6 - 10^7$ (UN), $9 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^7$ (FG), $4 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^7$ (CG) si $10^6 - 5 \cdot 10^6$, $10^7 - 2 \cdot 10^7$ (FESG), in pasi de 10^n pentru $m_1 10^n < t_w < m_2 10^n$.

autocorelatie:

$$\bar{C}(r, t_w) = \frac{1}{N_s} \sum_{\xi} [\langle \mathcal{D}_\xi \mathcal{D}_\eta \rangle - \langle \mathcal{D}_\xi \rangle \langle \mathcal{D}_\eta \rangle]_{av}, \quad r = |\mathbf{r}_\xi - \mathbf{r}_\eta| \tag{34}$$

$$\tilde{C}(t, t_w) = \frac{1}{N_s} \sum_{\xi} [\langle \mathcal{D}_\xi(t + t_w) \mathcal{D}_\xi(t_w) \rangle]_{av}, \tag{35}$$

unde N_s este numarul total de elemente (sub-volume) din spatiul real, t_w este timpul de asteptare si $\langle \cdot \rangle$, $[\cdot]_{av}$ sunt mediile termice si dupa dezordine. Folosind functiile de corelatie, se poate analiza dinamica tipica de ne-echilibru specifica sistemelor de tip sticla (*glassy systems*).

In Fig. 11 este redata evolutia in timp a domeniilor pentru fiecare sintre sistemele analizate. Se pune astfel in evidenta, caracterul de sisteme in ne-echilibru in cazul FESG comparativ cu celelalte sisteme, in care evolutia catre echilibru este mult mai rapida.

Formalismul dezvoltat pe baza statisticii fractionare de excluziune pune la dispozitie o interpretare unica a sistemelor de particule in interctie cu proprietati vitroase (*e.g. Fermi, Coulomb, Bose glass*).

Mai multe detalii se pot gasi in lucrarea **Rom. J. Phys. 60, 691 (2015)**.

6 Metode teoretice noi pentru studierea statisticii cuantice a fononilor in nanostructuri

Metoda propusa pentru studierea structurilor cristaline finite este o generalizare a celei folosite in materia condensata pentru sisteme infinite si care, in esenta, se bazeaza pe seriile Fourier. Pentru a descrie starile proprii ale ecuatiei Schrodinger pe o retea finita vom folosi o generalizare a identitatii, pe care am demonstrat-o anterior [24] si care face legatura intre o suma finita de la o functie periodica $f(z;x) = f(z;x+\tau)$ cu dezvoltarea acestei functii in seriile Fourier (l, m, n, N sunt numere intregi):

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f\left(z; x+\tau\frac{m}{N}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(i2\pi x l N/\tau\right) c_{lN}(z). \tag{36}$$

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(z;x)\exp\left(-i2\pi x n/\tau\right) dx$$

Pentru cazul particular al excitatiilor magnetice, cum am aratat anterior, se realizeaza situatia cand $\tau = 2\pi$, deoarece functia $f(z;x) = \exp(z\cos x) = f(z;x+2\pi)$ este legata de suma statistica dupa dispersia magnonilor feromagnetici, $\varepsilon(Q) = 2J(1-\cos(Q))$. Aceasta dispersie poate fi extinsa pentru retele de mai multe dimensiuni, unde Q este numarul (vectorul) de unda exprimat in unitatile pasului retelei, a. In nanostructuri acest numar quantic poate diferi de $2\pi m/N$, care corespunde conditiilor ciclice, dar si distributia numerelor cuantice, dupa cum vom vedea, poate fi neuniforma. Din (36) rezulta ca pentru $\tau = 2\pi$ suma respectiva este generatoare de functii Bessel modificate $I_n(z)$:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(z\cos\left(x+2\pi\frac{m}{N}\right)\right) = I_0(z) + 2\sum_{l=1}^{\infty}\exp\left(ixlN\right) I_{lN}(z), \tag{37}$$

folosind representarea

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp\left(z\cos y\right)\cos\left(ny\right) dy = I_n(z).$$

Eq. (37) generalizeaza formulele cunoscute din [25] obtinute pentru cazurile particulare, $N = 1, 2$. O proprietate remarcabila al acestei expresii este ca din dreapta relatiei avem seria corectiilor dupa $1/N$ la limita termodinamica (cu valoarea $I_0(z)$, $N \longrightarrow \infty$ si $z \sim -\beta \equiv -1/k_B T = const$, i.e. limita se ia la temperatura constanta) a sumei din stanga. Acest procedeu, deschide posibilitatea construirii expresiilor analitice pentru functiile termodinamice ale sistemelor magnetice discrete finite si, dupa cum vom arata, permite tratarea diverselor conditii impuse la limita.

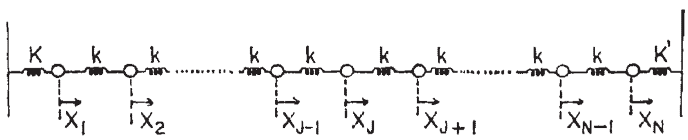

Figure 12: Lantul armonic din N atomi.

Pentru un lant armonic din N atomi de lungimea $L = N-1$ conditiile la limita sunt stabilite de raportul dintre constantele $\delta \equiv K/k$ si $\delta' \equiv K'/k$, vezi Fig.12. Valorile δ traverseaza intervalul intre "lantul liber" $\delta = \delta' = 0$ (FB) si cel fix la capete $\delta = \delta' = \infty$ (CB). De mentionat ca modelul descrie si modurile longitudinale de vibratii in nanofire, [26], si permite tratarea interactiei electron-phonon in micro-dispozitivele electronice de racire cu multiple aplicatii [27]. Ecuatiile de miscare pentru deplasarile nodurilor retelei

$$M\ddot{x}_0 = -(K+k)\,x_0 + kx_1,\;\; M\ddot{x}_j = k(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}),\;\; M\ddot{x}_L = -\left(K^{/} + k\right)x_L + kx_{L-1}, \quad (38)$$

pot fi rezolvate prin diverse metode, e.g. [28], solutia fiind data de $j \equiv X = 0, 1, .., L$

$$x_j = a_m(X)\cos(\omega_m t)\,, \quad \omega_m = \gamma\left|\sin(Q_m/2)\right|\,, \quad (39)$$

unde $\gamma/2 = \sqrt{k/M}$ este de ordinul vitezei sunetului si numerele cuantice Q sunt solutiile ecuatiei

$$\exp(i2QN) = \frac{(\exp(-iQ) + \delta - 1)(\exp(-iQ) + \delta' - 1)}{(\exp(iQ) + \delta - 1)(\exp(iQ) + \delta' - 1)}. \quad (40)$$

Expresiile explicite ale acestora sunt necesare pentru descrierea termodinamicii statistice cuantice, insa sunt cunoscute doar pentru cateva cazuri limita cand se verifica distributia uniforma a numerelor cuantice. De exemplu:

$$a_m^{CB}(X) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(Q_m X)\,,\; Q_m = \; m\pi/L, m = 1, ..., L-1, \quad (41)$$

$$K = K^{/} = 2k : a_m^{SB}(X) = \sqrt{\frac{2}{L+1}}\sin(Q_m(X + 1/2))\,,\; Q_m = \; m\pi/(L+1)\,,\; m = 1, ..., L$$

$$a_m^{FB}(X) = \sqrt{\frac{2}{L+1}}\cos(Q_m(X + 1/2))\,,\; Q_m = \; m\pi/(L+1)\,,\; m = 0, ..., L.$$

In ultima formula valoarea $Q_m = 0$ corespunde miscarii de translatie a centrului de masa (CM) al lantului liber $K = K^{/} = 0$, detasata de miscarea oscilatorie din Eq.(39) ($\omega_m = 0$) a restului gradelor de libertate ($\omega \neq 0$), si data de solutia Eq. (38) $x_0 = x_1 = x_L = at + b$ - i.e. o miscare de translatie. Este firesc ca solutiile de tipul celor de mai sus sunt utilizate in diverse domenii pentru a trece la limita termodinamica, data fiind uniformitatea si simetria distributiei, care permite inlocuirea sumelor dupa m prin integrarea dupa variabile continue Q.Mentionam ca amplitinile pot lua o forma simetrizata fata de centrul lantului prin $X \longrightarrow X + L/2$, cum se procedeaza de obicei. Insa in contextul fizic realist, nu putem avea un sistem complet decuplat de exterior (FB) sau un cuplaj absolut simetric, $\delta = \delta^{/}$, ceea ce presupune existenta unui "crossover" dupa constantele de cuplaj δ intre miscarea de translatie a CM catre miscarea oscilatorie si, astfel, participarea CM la termodinamica sistemului. Centrului de masa ii corespunde starea cu cea mai joasa energie. Astfel, se impune problema evolutiei starilor quantice intre limitele FB si CB, dar si problema cuplajului asimetric $\delta \neq \delta^{/}$.

Am obtinut solutia completa data de amplitudine si solutiile Eq. (40) ($Q \equiv Q_m$)

$$a_m(X) = \sqrt{\frac{1}{F}}\left[\delta\sin(Q(X+1)) + 2(1-\delta)\sin(Q/2)\cos(Q(X+1/2))\right]$$

$$\begin{aligned} F \;\; = \;\; & \left(\delta^2 + 4(1-\delta)\sin^2(Q/2)\right)\left[2N + 1 - \sin((2N+1)Q)/\sin(Q)\right]/4 \\ & + (1-\delta)\sin(QN)\left(\sin(Q(N+1)) - (1-\delta)\sin(QN)\right). \end{aligned} \quad (42)$$

Parametrul $\delta^{/}$ se contine implicit in $a_m(X)$ prin intermediul valorilor proprii Q din Eq.(42), ceea ce demonstreaza complexitatea comportamentului acestui sistem "simplu". In particular, constanta de normare $F = F(Q_m)$ devine dependenta de numarul cuantic al starii Q_m, in contrast cu solutiile uzitate din Eq. (41). O consecinta a reciprocitatii relatiilor de ortonormare este generarea unei clase de identitati noi, departe de a fi triviale, pentru sumele finite implicand amplitudinile

$$\sum_{X=0}^{N-1} a_m^2 (X) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2N-1} a_m^2 (X) = 1. \tag{43}$$

Coeficientul 1/2 si suma largita (*dupa setul complet de stari*) din dreapta reflecta degenerarea starilor pentru dispersia Eq.(39) in cazul lantului. Solutiile analitice se pot obtine pe ambele laturi ale "crossover"-ului si demonstreaza o neliniaritate in zona cuplajului slab, i.e. $\delta << 1$. Pentru a include si asimetria cuplajului, am presupus ca $\delta^{/} = \alpha\delta << 1$, unde α este un coeficient de asimetrie liber. Obtinem urmatoarele expresii analitice pentru cuplajul slab, mai interesant din punct de vedere fizic, mentionand ca cuplajul tare duce la expresii liniare.

$$\begin{aligned} Q(m \geq 1) &\simeq \frac{\pi m}{N} + \frac{\delta}{N} \times \frac{1+\alpha}{2} \times \frac{1+\cos\left(\frac{\pi m}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}, \\ Q(m=0) &\simeq \sqrt{(1+\alpha)\,\delta/N}, \qquad \delta N < 1. \end{aligned} \tag{44}$$

Putem vedea ca egalitatea $\delta N = 1$ stabileste pozitia "crossoverul"-ui, si scoate in evidenta "rapiditatea" (dupa δ) cu care se trece de la miscarea de translatie la cea oscilatorie a CM. Numarul de unda cuantic $Q(m=0)$ corespunde excitatiei CM si, fiind substituit in Eq.(42), demonstreaza o amplitudine usor variabila, care insa nu completeaza semi-ciclul undei intregi pe spatiul lantului (i.e. e o unda incomensurabila cu L), avand energia cea mai joasa din spectru.

Pentru a calcula functiile termodinamice vom prezenta metoda incepand cu solutiile uniforme Eq. (41). Caldura specifica $C(T)$ poate fi redusa la forma (36)

$$C(T) = (\beta\gamma)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial (\beta\gamma)^2} \equiv (\beta\gamma)^2 \frac{\partial^2}{\partial (\beta\gamma)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn} \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(-\beta\gamma n \omega_m\right). \tag{45}$$

Atunci similar cu (37) avem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(-z \left|\sin\left(x + \frac{\pi m}{N}\right)\right|\right) \\ = &\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-z \sin y)\, dy + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-z\sin y) \cos(2lN(x-y))\, dy. \end{aligned} \tag{46}$$

In limita termodinamica (TDL) se obtine

$$C^{TDL}(T) = (\beta\gamma)^2 \frac{\partial^2}{\partial (\beta\gamma)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(I_0(n\beta\gamma) - L_0(n\beta\gamma)\right)$$

unde $L_0(x)$ este functia Struve. Vom examina comportamentul la temperaturi joase, pentru care obtinem

$$\begin{aligned} C^{TDL}(T) &= (\beta\gamma)^2 \frac{\partial^2}{\partial (\beta\gamma)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\gamma\beta n} + \frac{1}{(\gamma\beta n)^3} + ...\right) \\ &\simeq \frac{2\pi}{3\gamma\beta} + \frac{12\pi^3}{45(\gamma\beta)^3} + ... \end{aligned} \tag{47}$$

Evaluarea corectiilor dupa N finit in Eq. (46) trebuie sa tina cont de natura discreta a spectrului si exsitenta "crossover"-lui la temperatura $T = T^* \sim \pi/N$ (am omis unitatile de masura) cand energia termica devine comparabila cu energia minima de excitatie a sistemului, astfel ca un parametru fizic adecvat nu este temperatura ci raportul $P \equiv T/T^* = 4NT/\pi$. Pentru $P < 1$ functia $C\ (T)$ are caracter exponential si pentru $T > T^*$ vom obtine seriile dupa T^*/T, ramanand totodata valabila restrictia $T/\gamma < 1$ din Eq. (47). Pentru un lant liber substituim in (37) $x = 0$. Se poate demonstra ca

$$A^{FB} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_0(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-\beta n\gamma \sin y) \cos(4kNy)\, dy - 1/N \right). \tag{48}$$

Functiile sub semnul integrarii se pot trata prin metode asimptotice, deoarece $\beta n\gamma$ si kN iau valori mari. In mod simillar se pot studia si restul conditiilor la limita. De exemplu, pentru cuplajul asimetric Stiff-Free $K = 2k$ si $K' = 0$ obtinem solutia Eq. (40) $Q_m = (2m+1)\pi/2N$, prin care se ajunge la expresia

$$A^{SF} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_0(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} (-1)^k \int_0^{\pi} \exp(-\beta n\gamma \sin y) \cos(4kNy)\, dy - 1/N \right).$$

Mai jos sunt prezentate rezultatele acestor calcule pentru caldura specifica, continand primii termeni semnificativi pentru diferite conditii la limita

$$C^{ciclic} \simeq \frac{2\pi}{3\beta} - \frac{1}{N};\ C^{FB} \simeq \frac{2\pi}{3\gamma\beta} - \frac{0.5}{N};\ C^{CB} \simeq (1 - 1/N)\frac{2\pi}{3\beta} - \frac{0.5}{N}; C^{SF}(T) \simeq \frac{2\pi}{3\gamma\beta} - o\left(\frac{1}{N}\right), \tag{49}$$

$$C^{W}(T) \simeq \frac{2\pi}{3\gamma\beta} + \frac{0.5}{N}. \tag{50}$$

Din rezultatele obtinute se poate trage concluzia ca $C(T)$ a lantului atomic finit manifesta o dependenta liniara de temperatura deplasata cu ˜$1/N$ fata de limita termodinamica. Valoarea acestei deplasari este negativa pentru conditiile la limita discutatate de obicei (periodice, libere, fixe). Acest "shift" negativ este in concordanta cu legea Nernst (a 3-a lege a termoodinamicii), prin care caldura specifica tinde spre zero la $T = 0$. Aparentul conflict cu aceasta lege, pe care il demonstreaza conditiile la limita de tipul asimetric, Liber-Fix, si, cu deosebire, Cuplaj Slab (Weak Coupling) Eq. (50), se datoreaza participarii centrului de masa a sistemului la termodinamica sistemului si "crossoveru"-lui de la miscarea de translatie la cea oscilatorie. Efectul centrului de masa pentru cuplajul slab ($\delta < \delta' \simeq 0.01$) este exmplificat in Fig.(13) la diferite valori ale numarului de atomi.

Este clar ca la o anumita temperatura, vezi Eq.(44), $T'(\delta) \sim \frac{\sqrt{(1+\alpha)\delta N}}{N} < T^*$ dependenta liniara trece in cea exponentiala, asigurand respectarea legii Nernst, $C(T=0) = 0$, insa pentru acest tip de conditii la limita $T'(\delta)$ poate fi oricat de mic. Asemenea "conflict" aparent, dar si schimbarea capacitatii termice in dependenta de puterea cuplajului cu mediul, pot avea aplicatii interesante in nanofizica. De mentionat ca spre deosebire de cresterea capacitatii calorice din cauza impuritatilor (e.g. Schottky), care produce un maxim al functiei $C(T)$, miscarea CM se manifesta prin deplasarea lui $C(T)$ pe tot intervalul de temperaturi $T > T'$ la valori ce depasesc limita termodinamica. Dependenta caldurii specifice de temperatura pentru diferite conditii la limita discutate este ilustrata de Fig.(14).

In concluzie, acest studiu ne arata ca metoda prezentata poate fi utilizata cu succes pentru obtinerea spectrelor de excitatii colective la obtinerea fizicii statistice a nanostructurilor tinand cont de conditiile la limita. Aproximatiile analitice gasite permit o intelegere mai adecvata a fenomenelor fizice ce au loc in asemenea sisteme, in special la temperaturi scazute, caz in care rolul fluctuatiilor cuantice devine decisiv.

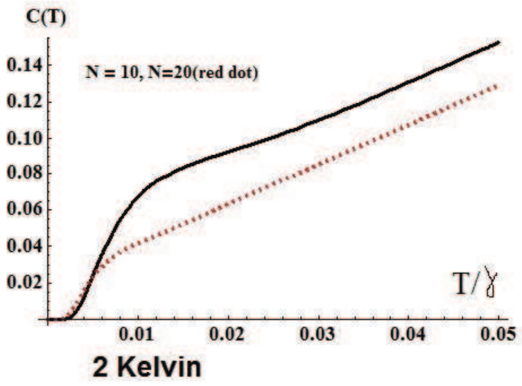

Figure 13: Caldura specifica a lantului atomic pentru conditii la limita de tip "Weak Coupling", pentru $\delta < \delta' \simeq 0.01$ si numar diferit de atomi N.

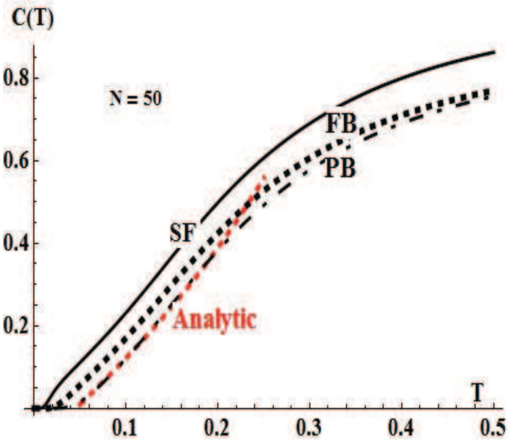

Figure 14: Caldura specifica a lantului atomic pentru diverse conditii la limita. Este aratata si solutia analitica (rosu punctat) pentru conditiile ciclice.

References

[1] D. V. Anghel. *Phys. Lett. A*, 372:5745, 2008.

[2] D. V. Anghel. *Physica Scripta*, 2012:014079, 2012.

[3] D. V. Anghel, G. A. Nemnes, and F. Gulminelli. *Phys. Rev. E*, 88:042150, 2013.

[4] S. Cojocaru, A. Naddeo, and R. Citro. *EPL*, 106:17001, 2014.

[5] P. V. Hendriksen, S. Linderoth, and P.-A. Lindgard. *Phys. Rev. B*, 48:7259, 1993.

[6] A. Demortier et al. *Nanoscale*, 3:225, 2011.

[7] H. Huili et al. *Ceram. Intern.*, 41:6212, 2015.

[8] M. Nahum, T. M. Eiles, and J. M. Martinis. *Appl. Phys. Lett.*, 65:3123, 1994.

[9] *Cryogenic Particle Detection.* Springer, New York, 2005.

[10] P. A. R. Ade et al. *Phys. Rev. Lett.*, 112:241101, 2014.

[11] H. Q. Nguyen, M. Meschke, H. Courtois, and J. P. Pekola. Sub-50-mk electronic cooling with large-area superconducting tunnel junctions. *Phys. Rev. Appl.*, 2:054001, 2014.

[12] M. A. Stroscio and M. Dutta. *Phonons in Nanostructures.* CUP, United Kingdom, 2004.

[13] F. C. Wellstood, C. Urbina, and J. Clarke. *Phys. Rev. B*, 49:5942, 1994.

[14] L. M. A. Pascal, A. Fay, C. B. Winkelmann, and H. Courtois. *Phys. Rev. B.*, 88:100502(R), 2013.

[15] S.-X. Qu, A. N. Cleland, and M. R. Geller. *Phys. Rev. B*, 72:224301, 2005.

[16] Wang Xiao-Min, Lian Guo-Xuan, and Li Ming-Xuan. *Chin. Phys. Lett.*, 20:1084, 2003.

[17] J. T. Karvonen and I. J. Maasilta. *Phys. Rev. Lett.*, 99:145503, 2007.

[18] J. T. Karvonen and I. J. Maasilta. *J. Phys. Conf. Ser.*, 92:012043, 2007.

[19] N. Bannov, V. Aristov, V. Mitin, and M. A. Stroscio. *Phys. Rev. B*, 51:9930, 1995.

[20] B. A. Glavin, V. I. Pipa, V. V. Mitin, and M. A. Stroscio. *Phys. Rev. B*, 65:205315, 2002.

[21] F. D. M. Haldane. *Phys. Rev. Lett.*, 67:937, 1991.

[22] Y.-S. Wu. *Phys. Rev. Lett.*, 73:922, 1994.

[23] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957.

[24] S. Cojocaru. *Int. J. Mod. Phys. B*, 20:593, 2006.

[25] *Handbook of Mathematical Functions.* Dover,New York, 1972.

[26] Z. Lindenfeld and R. Lifshitz. *Phys. Rev. B,*, 87:085448, 2013.

[27] F. W. J. Hekking, A. O. Niskanen, and J. P. Pekola. *Phys. Rev. B*, 77:033401, 2008.

[28] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter, and G. R. W. Quispel. *J. Phys. A*, 20:6397, 1987.