

INSTITUTE FOR ATOMIC PHYSICS
National Institute for Physics and Nuclear Engineering

Ș. Mișicu

**TOROIDAL COLLECTIVE MOTIONS
IN ATOMIC NUCLEI**

- Ph. D. Thesis -

Scientific Adviser: Dr. Aureliu Săndulescu

Member of the Romanian Academy of Sciences

Bucharest - Măgurele

1995

INSTITUTUL DE FIZICA ATOMICA
Institutul de Fizică și Inginerie Nucleară

Ș. Mișicu

**MIȘCĂRI COLECTIVE TOROIDALE
ÎN NUCLEUL ATOMIC**

- Teză de Doctorat -

Conducător științific: Acad. Aureliu Săndulescu

București - Măgurele

1995

Cuprins

I	Introducere.	3
1	Momentele multipolare toroidale.	5
1.1	Istoric și probleme actuale.	6
1.2	Obiectivele și organizarea lucrării	13
2	Momentul toroidal al unei distribuții nestatice de sarcini și curenți	17
I.A	Armonicele sferice vectoriale	23
II	Rezonanțe Gigant Toroidale	27
3	Dinamica Fluidului Nuclear.	29
3.1	Ecuțiile care guvernează DFN	30
3.2	Modul dipol toroidal și vârtejul Hill	43
3.3	Calculul multipolilor de tranziție pentru modul dipol toroidal.	47
4	Rezonanțele de spin-flip	55
4.1	Modelul Goldhaber - Teller generalizat	56
II.A	Vorticitatea hidrodinamică	63
II.A.1	Funcția de curent	64
II.A.2	Potențialul de viteze al unui lichid	66
II.A.3	Vârtejul Hill	67
II.B	Împrăștierea de electroni și fotoni pe nuclee	71
II.B.1	Împrăștierea nerelativistă a unui electron	71
II.B.2	Electroni relativști	74
II.B.3	Fotoexcitare și dezintegrare gamma	75

II.B.4	Secțiunea diferențială pentru procesul (e, e')	77
III	Contribuții Toroidale la Mișcările Colective de Rotație - Vibrație	85
5	Modelul Rotatorului Riemann	87
5.1	Cinematica Dirichlet a Elipsoidului	92
5.2	Elipsoizi Riemann	100
5.3	Structura electromagnetică a excitațiilor 2^+ , 4^+ în modelul rotațional Rie- mann	105
6	Separarea factorului de formă toroidal în procese de coincidență $(e, e'\gamma)$	117
6.1	Studiul curenților în reacții $(e, e'\gamma)$	119
III.A	Ecuțiile Virialului	125
III.A.1	Ecuțiile de ordinul întâi	125
III.A.2	Ecuțiile de ordinul doi	126
IV	Concluzii	129

Capitolul I

Introducere.

1

Momentele multipolare toroidale.

Metoda dezvoltărilor câmpurilor în multipoli și a sarcinilor și curenților în momente multipolare este un instrument foarte util în studiul proprietăților electromagnetice a sistemelor clasice și cuantice multipolare [Str41], [Ro55], [Ja75]. Deși această metodă a fost prima oară introdusă în electrodinamica clasică în legătură cu unele tipuri de soluții ale ecuațiilor Maxwell, ea și-a găsit consacrarea mai ales în teoria cuantică a câmpului electromagnetic. Astfel, sursele câmpului sunt sisteme cuanto-mecanice (nuclee, atomi, electroni) cu un moment cinetic cuantificat. Atât momentul cinetic cât și paritatea π acestor sisteme sunt numere cuantice bune. Descrierea cuantică a câmpului este necesară pentru a satisface legea conservării momentului cinetic în emisia și absorbția radiației electromagnetice.

Există, însă și o abordare semiclassicală a acestei descrieri, în primul rând ca urmare a formulării principiului de corespondență pentru energia de interacție responsabilă de emisie și absorbție, și în al doilea rând, ca urmare a posibilității clasificării soluțiilor ecuațiilor Maxwell după reprezentările ireductibile ale grupului tridimensional al rotațiilor $SO(3)$. Formularea principiului de corespondență constă în înlocuirea densităților de sarcină și curenți ale sursei câmpului prin operatorii echivalenți cuanto-mecanici, iar clasificarea după reprezentările ireductibile ale $SO(3)$ implică posibilitatea reprezentării câmpurilor ca tensori ireductibili [Ro57]. Aceste reprezentări sunt denumite câmpuri multipolare.

Deși formalismul matematic al dezvoltărilor multipolare este bine pus la punct, apar deseori în literatură inadvertențe legate de parametrizare. Una dintre aceste probleme se referă la modul în care momentele Coulombiene (longitudinale) $Q_{\lambda\mu}$ sunt incluse în parametrizarea multipolară a părții transversale a curențului, prezența lor fiind obligatorie, din moment ce ele sunt responsabile de radiația de tip electric. Prin urmare trebuie să existe o legătură între părțile longitudinale și transversale ale curențului. În

cazul tranzițiilor nucleare această legătură este cunoscută sub denumirea de teorema lui Siegert. Domeniul de valabilitate al acestei teoreme este limitat însă și acest fapt pune sub semnul întrebării corectitudinea parametrizării multipolare a sarcinilor și curenților care se găsește în literatură.

În această lucrare vom adopta o parametrizare multipolară deosebită de cele care se întâlnesc de obicei în literatura de specialitate și care a fost propusă în urmă cu 25 de ani de Dubovik și Ceșkov [DC70a]. Parametrizarea propusă de aceștia pentru cvadricurent $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{J})$ a dus la descoperirea unei a treia familii de momente multipolare, și anume momentele multipolare toroidale.

În lucrarea de față vom fi interesați în apariția acestor momente toroidale în tranziții nucleare care implică excitarea modurilor colective de joasă energie și a rezonanțelor gigant.

1.1 Istoric și probleme actuale.

Blatt și Weisskopf [BW52] au fost primii care au observat că teorema lui Siegert trebuie să fie corectată pentru partea de magnetizare (spin) a curențului. Ei au introdus în limita distanțelor mari de la sursă încă un multipol electric, pe lângă cel Coulombian $Q_{\lambda\mu}$, și anume momentul multipolar electric indus $Q'_{\lambda\mu}$. Acest multipol reprezenta de fapt partea de spin a momentului multipolar toroidal care a fost introdus mai târziu.

Începutul a fost însă făcut de marele fizician sovietic Yakov V.Zeldovici care a atras atenția asupra violării inversiei spațiale în cazul unei particule de spin 1/2 aflată într-un câmp electromagnetic slab [Zel57]. Landau, observase cu puțin înainte, că o particulă elementară cu proprietățile menționate mai sus poate interacționa cu un câmp electromagnetic extern prin intermediul unei interacții dipolar electrice $d(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E})$ dacă și simetria de inversie temporală este violată. Într-adevăr : $T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}T^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}$ și $P\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}P^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}$, așa cum am arătat și în fig.(6.1).

Zeldovici a ridicat problema existenței aceluși tip de interacție electromagnetică care violează paritatea dar nu și reflexia temporală. Cum interacția $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}$ nu este permisă de invarianța de etalonare, atunci nu mai rămâne decât

$$a(\boldsymbol{\sigma}\Delta\mathbf{A}) = a(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) = a\mu(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J}) \quad (1.1)$$

unde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ este densitatea de curent care produce câmpul magnetic \mathbf{B} . În cazul în care paritatea se conservă, este evident că acest termen nu apare în expresia energiei deoarece $\boldsymbol{\sigma}$ este un pseudovector, iar \mathbf{J} un vector, adică $P\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J}P^{-1} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J}$. Pe de

Figura 1.1: Transformările de inversie spațială și temporală pentru cazul clasic al momentelor dipolare electrice.

altă parte, atât $\boldsymbol{\sigma}$ cât și \boldsymbol{J} își vor modifica semnul la aplicarea inversiei temporale și deci $T\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{J}T^{-1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{J}$, așa cum se vede în fig.(6.2)

Zeldovici a dat și un model clasic pentru această nouă caracteristică electromagnetică pa care a denumit-o, la sugestia lui A.S.Kompaniet, *anapol*. Și anume un fir conductor înfășurat pe un solenoid toroidal, astfel încât curentul care trece prin spirele elicoidale ale acestui solenoid crează un câmp magnetic în interiorul torului. În cazul în care toroidul se află în vid, nici un câmp magnetic produs de surse externe nu poate acționa asupra torului. Dacă toroidul va fi imersat într-o soluție electrolitică care umple spațiul din interiorul solenoidului, atunci asupra toroidului va acționa un moment al forței care este proporțional cu sinusul unghiului dintre axa toroidului și direcția curentului

$$\boldsymbol{M} = \mu a (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{J}) \quad (1.2)$$

Concluzia lui Zeldovici a fost că această nouă caracteristică statică care apare în procesele de interacție slabă este distinctă de caracteristicile electrică sau magnetică dipolară [ZP60].

În anii cincizeci Yu.M.Șirokov a publicat o serie de lucrări asupra reprezentărilor unitare finit-dimensionale ale grupului generalizat Lorentz [Shi51], [Shi54a], [Shi54b], [Shi57a], [Shi57b] și [Shi57c]. El a extins aceste cercetări cu scopul de a obține o metodă generală de parametrizare invariantă a elementelor de matrice relativiste ale operatorilor

Figura 1.2: Transformările de inversie spațială și temporală pentru cazul clasic al momentelor de anapol.

locali de tip tensorial sau spinorial, dați în reprezentarea Heisenberg și acționând asupra particulelor libere. Împreună cu A.A.Ceșkov, în 1963, au propus o parametrizare a elementului de matrice a operatorului curent, diagonal în masă m și spin S și au obținut o a treia familie de factori de formă, diferită de cea de sarcină sau magnetică, pentru particule de spin arbitrar [CS62], [CS63]. Ulterior, Ceșkov a arătat că în cazul dipolar acești factori de formă sunt asociați anapolului lui Zeldovici, iar în cazul de multipolaritate arbitrară a introdus denumirea de *momente magnetice de ordinul doi* [Ce66]. Expresiile analitice date de Ceșkov în articolul citat conțineau erori, însă el are meritul de a fi primul care a sesizat că anapolul nu este decât primul membru al acestei noi familii de momente multipolare.

Apoi, în lucrările [DC66a], [DC66b], V.M.Dubovik și A.A.Ceșkov au început studiul proprietăților noii familii de multipoli electromagnetici în procese cum ar fi împrăștierea elastică electron - deuteron, în care are loc violarea invarianței CP . A fost, deasemenea propusă măsurarea momentului toroidal cuadripolar pentru astfel de procese [DLC67]. Iar în 1970 [DC70a], [DC70b] și apoi în lucrarea de sinteză [DC74] au prezentat cercetările lor asupra analogilor clasici ai acestor factori de formă noi, adică distribuțiile (momentele) multipolare toroidale ale curenților de convecție.

Importanța cercetărilor făcute de Dubovik și Ceșkov constă în faptul că ei au obținut o parametrizare completă a celei mai generale configurații de sarcini și curenți după cele trei familii independente de momente multipolare (de sarcină, magnetic și toroidal)

precum și a mediilor distribuțiilor la puterea $2n$ ale acestora. Ei au arătat că în timp ce caracteristicile toroidale statice pot exista din punct de vedere cuanto-mecanic numai în cazul violării parității P pentru multipolarități impare și a inversiunii temporale T pentru multipolarități pare, caracteristicile dinamice (de tranziție) toroidale pot exista fără a mai fi constrânse de legile de simetrie P sau T . Aceste momente toroidale de tranziție pot apărea în cazul în care sistemul cuantic este excitat de acele componente ale câmpului electromagnetic extern care au o structură convenabilă, cum ar fi de exemplu câmpul magnetic elicoidal cu $(\nabla \times \mathbf{B}) \neq 0$, sau în cazul în care avem de a face cu un curent extern perturbator \mathbf{J} , care va induce, cf. (1.1), o tranziție dipolar toroidală [DT83], [DT90].

Aplicațiile cele mai de succes ale momentelor toroidale în fizica modernă au fost făcute în domeniul fenomenelor de violare a parității la nivel atomic [Khr90], ca urmare a descoperirii experimentale a neconservării parității în tranziții atomice și a măsurării activității optice a vaporilor de Bismuth [BZ78a], [BZ78b]. Un interes deosebit a fost acordat efectelor P - neinvariante care depind de spinul nuclear și s-a demonstrat că o contribuție majoră la acest efect în atomii grei provine de la interacția electromagnetică a unui electron cu momentul de anapol al nucleului. Anapolul nuclear apare ca o consecință a forțelor nucleare P - neinvariante [FK80], iar interacția sa cu electronul este de tip local, ca și interacția slabă a curenților neutri. Astfel, în cazul unui atom hidrogenoid, termenul care violează paritatea în Hamiltonianul nerelativist este de forma [CM64], [BB74], [MRK76]

$$H_{p.v.} = \frac{Q}{4\sqrt{2}} \frac{G_F \hbar^3}{mc^2} [\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \delta(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \delta(\mathbf{r})] \quad (1.3)$$

unde pentru modelul Weiberg-Salam, $Q = -4 \left[(4 \sin^2 \theta_W - 1) Z + N \right]$, θ_W este unghiul Weinberg ($G_F = 10^{-5} m_p^{-2}$). Această interacție este pseudoscalară și duce prin urmare la un amestec al stărilor atomice de același moment cinetic, dar de paritate opusă. Prin urmare interacția amestecă numai stările electronice $s_{1/2}$ și $p_{1/2}$. Prin urmare funcția de undă a stării $2s_{1/2}$ va avea forma [Mos74]

$$\psi = \psi_0(2s_{1/2}) + i\eta\psi_0(2p_{1/2}) \quad (1.4)$$

iar coeficientul de amestec η trebuie să fie imaginar datorită invarianței interacției la inversiunea temporală. Cum reflexia T se concretizează nu numai prin substituția $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow -\boldsymbol{\sigma}$, dar implică și conjugarea Hermitică a funcției de undă, amestecul în funcția de undă va duce la o rotație locală a spinului stării inițiale cu unghiul $\phi = 2\eta \frac{\psi_0(2s_{1/2})}{\psi_0(2p_{1/2})}$ în jurul

Figura 1.3: Structura elicoidală a spinului electronic indusă de amestecul stărilor $s_{1/2}$ și $p_{1/2}$.

direcției $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Se poate observa ușor că dacă starea inițială $s_{1/2}$ ar fi polarizată în lungul axei z , adică, dacă $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, atunci, pe măsură ce distanța de la centru se mărește spinul în starea ψ va avea o proiecție pe planul xy tangent la un cerc. Această configurație se mai numește *spin elicoidal* (spin helix) [BKZ79] și este prezentată în fig.5.3.

Distribuția de curent corespunzătoare unui astfel de sistem va fi o suprapunere a curentului circular care curge în planul perpendicular pe momentul cinetic cu un curent cu o structură toroidală. Această ultimă structură electromagnetică, legată de neconservarea parității este chiar anapolul lui Zeldovici. Anapolul atomic poate fi evaluat cu ajutorul formulei [AL82], [BS90], [Lew93]

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{4} \int d\mathbf{r} r^2 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

O estimare care include și corecții relativiste (R) dă [Khr90]

$$a \sim e\alpha G_F Z^2 RQ \quad (1.6)$$

Anapolul nuclear a fost, recent, măsurat într-un experiment atomic pentru ^{133}Cs [NMW88]. Așa cum am afirmat mai devreme, anapolii nucleari sunt o consecință a existenței componetelor P - neinvariante. Constanta efectivă adimensională k_a a unei astfel de interacții a fost prezisă în cadrul modelului în pături Woods - Saxon cu spin

- orbită pentru o serie de nuclee grele printre care și ^{133}Cs , pentru care $(k_a)_{th} = 0.25$ [FKS84] iar în experimentul citat mai sus s-a determinat valoarea $(k_a)_{exp} = 0.72(0.39)$. Haxton și colaboratorii [HBM89] au estimat momentele de anapol ale nucleelor ^{19}F și ^{133}Cs și au arătat că dacă se introduc corecții legate de curenții mezonici, acestea vor depăși considerabil valorile uniparticulă sau a nucleonului de valență, astfel încât momentele anapolare devin cuplajul dependent de spin P - neinvariant dominant în nuclee grele. Există deasemenea și alte abordări teoretice în care se propune separarea curentului neutral axial de contribuția momentului de anapol, care minimizează efectul curentului hadronic axial [Bou90], [BP91]. În aceste referințe, momentul de anapol nuclear este dat în funcție de magnetizarea hirală

$$\mathbf{M}_{p.v.}(\mathbf{r}) = \beta(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \times \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) + O(G_F^2) \quad (1.7)$$

prin relația

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{M}_{p.v.}(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

Cu alte cuvinte, $\mathbf{M}_{p.v.}(\mathbf{r})$ se obține din magnetizare prin aplicarea unei rotații infinitezimale de unghi $\beta(r)$ în jurul lui \mathbf{r} , adică avem de a face cu un eliomagnetism sferic de genul celui reprezentat în fig.(5.3).

Foarte recent s-a arătat că în reacții de împrăștiere elastică a electronilor, însoțite de violarea parității, în limita $q_\mu^2 \rightarrow 0$, curentul axial - vector va dispărea și secțiunea de ciocnire va fi dominată de anapol [MDDPKB94].

În prezent mai sunt investigate caracteristicile electromagnetice legate de conservarea parității și violarea inversiunii temporale, adică momentele toroidale cuadrupolare [MP89], [KP89] sau *tetrapolare* [San93] ale atomilor.

Au fost deasemenea calculate momentele anapolare și ale altor sisteme cuantice sau particule elementare, cum ar fi pozitroniul [BHS91], particulele Majorana masive și de masă nulă [BH91], a unei molecule hirale [KP90]. Trebuie însă subliniat că formal, nu este posibilă definirea unui moment anapolar pentru o particulă elementară (lepton, cuarc, electron, neutrino), deoarece acesta depinde de alegerea parametrului de etalonare electroslab.

În ultimii zece ani fost studiate intens efectele electromagnetice de tip toroidal dinamice care sunt induse în solide. S-a demonstrat teoretic posibilitatea existenței unei noi simetrii punctuale a magnetilor ideali pe lângă cea descrisă de vectorul axial \mathbf{M} (densitatea locală de magnetizare a cristalului) care își schimbă semnul la inversiunea temporală și vectorul \mathbf{P} (polarizarea electrică) care este simetrică la inversiunea temporală în

piro- și feroelectrici. Această nouă simetrie corespunde unei stări în care ordinea este caracterizată de un vector polar \mathbf{T} care este antisimetric la inversiunea temporală. Această stare reprezintă ordonarea momentelor toroidale elementare. Primul care a subliniat că simetria vectorilor \mathbf{T} coincide cu simetria vectorului densitate de curent a fost Ascher [As66].

Magnetoelectricii toroidali formează un subset de 31 de subclase a agregatelor din clasa cristalelor cu simetrie magnetică în care este posibilă apariția antiferomagnetismului [GGKV84], [VGK84], [KT86]. În starea toroidală există însă o diminuare a simetriei în raport cu antiferomagneticii ca urmare a P - neinvarianței. Deasemenea este important de subliniat că magnetoelectricii toroidali trebuie diferențiați de feromagnetici, unde simetria P și T are loc independent de vectorii \mathbf{P} și \mathbf{M} . Atât polarizarea spontană \mathbf{P} cât și magnetizarea \mathbf{M} se anulează în starea toroidală.

Dubovik și colaboratorii [DTT86], [DT90] au investigat tranziția de fază de ordinul II într-un cristal însoțită de formarea stării de ordine toroidală în cadrul modelului microscopic.

A mai fost prezisă și apariția în solide a unor mișcări colective legate de oscilațiile densității de moment toroidal ale electronilor de bandă pentru diferite tipuri de substanțe feroelectrice, toroidal - orbital - magnetice, spin - antiferomagnetice [TF86].

Descoperirea experimentală a interacției toroidale pentru agregate magnetice [TS90] impulsionează pe mai departe studiul structurilor toroidale în fizica solidului [DMM92], [DLM92].

În cadrul electrodinamicii clasice există în ultimii ani un interes sporit în studiul momentelor toroidale și ale radiației electromagnetice generate de acestea. Pentru dipolul toroidal au fost calculate câmpurile pentru radiația clasică [BZ77], [DT90], [Mi92] și radiația Cernkov [GT85], și au fost studiate proprietățile solenoizilor cu topologie toroidală și curenți poloidali care reprezintă modele ideale de momente toroidale statice și variabile clasice [Mil84], [AD92], [Af93], [ADM93]. Cercetările privind proprietățile solenoizilor toroidali sunt făcute și în conexiune cu efectul Bohm - Aharonov [LS78], [Af94] și efectul Aharonov - Casher [Af91a], [Af91b].

Nu în ultimul rând trebuie menționate direcțiile de aplicare a momentelor toroidale dinamice în fizica nucleară. S-a arătat că în analiza contribuțiilor la secțiunea de împrăștiere inelastică a electronilor pe ${}^9\text{Be}$, contribuțiile toroidale dipolare T_1 pot masca factorii de formă cuadrupolari magnetici M_2 în tranziția $3/2^- \rightarrow 1/2^+$ [BDC72]. În lucrarea [DET76] se face observația importantă că tranzițiile electrice de spin - flip E1 rezultă din partea de spin a dipolului toroidal T_1 , și se calculează tranzițiile *împiedicate* (hindered)

datorate acestuia în nuclee grele (^{175}Lu , ^{181}Ta). Pentru procese de conversie internă ale nucleelor s-a stabilit [LGF81] că momentele toroidale ale nucleelor atomice pot explica comportamentul anomal al coeficienților de conversie internă.

Investigarea mișcărilor colective de natură toroidală pentru care există o lucrare de pionierat [Sem81] este subiectul lucrării de față și care se bazează pe referințele [BasMiS93], [Mi94a], [Mi94b] și [Mi95].

1.2 Obiectivele și organizarea lucrării

Studiul mișcărilor colective la nuclee a fost și continuă să fie în prezent un capitol important al structurii nucleare. În cazul mișcărilor de mică amplitudine sunt investigate excitațiile colective de joasă energie, cum ar fi vibrațiile suprafeței nucleare sau rotația rigidă a nucleului. Deasemenea rezonanțele gigant reprezintă un domeniu vast de cercetare începând cu Rezonanța Gigant Dipolară (RGD), care este cunoscută de aproape o jumătate de secol, sau modurile de forfecare (scissors) orbitale și de spin.

Toare aceste tipuri de excitații corespund unei anumite multipolarități λ și sunt clasificate după proprietățile lor electromagnetice, adică sunt fie de tip electric ($E\lambda$), fie de tip magnetic ($M\lambda$). Această clasificare este conformă cu dezvoltarea multipolară a câmpului electromagnetic extern care produce excitația respectivă. Astfel, dacă avem de a face cu o undă electromagnetică, componenta sa transversală electrică va induce în nucleu o deplasare, coerentă în direcția câmpului inductor \mathbf{E} , a sarcinii pozitive din nucleu, adică a protonilor. Ca urmare a necesității conservării centrului de masă, neutronii se vor deplasa în sens opus [EG70a]. Va apărea o polarizare de tip dipolar electric a materiei nucleare. Acest efect se datorește faptului că unda electromagnetică care produce acest efect are o polarizare de tip dipolar electric, adică termenul dominant din Hamiltonianul de interacție este cel proporțional cu \mathbf{E} (câmp electric) \times \mathbf{D} (dipol indus în nucleu).

În cazul în care componenta transversală magnetică a fotonului induce un moment dipolar magnetic în nucleu, elipsoidul protonic va oscila în sens opus față de elipsoidul neutronic în cazul izovectorial (forfecare), sau curenții turbionari protonici induși de unda magnetică vor avea același sens de curgere cu al curenților neutronici în cazul izoscalar (vibrații rotatorii).

În lucrarea aceasta, așa cum rezultă chiar din titlu, vom fi interesați de mișcările colective care sunt asociate cu multipolii toroidali. Pentru a obține excitații de tip rezonanțe gigant toroidale ar trebui ca fotonul să aibă o puternică componentă magnetică de tip elicoidal ($\nabla \times \mathbf{B}$) care să inducă o mișcare vorticală inelară a curenților protonici și

neutronici, adică să aibă o caracteristică electromagnetică de tip dipol toroidal. Cum însă efectele magnetice sunt o corecție relativistă a celor electrice, probabilitatea excitării unei astfel de mișcării este mică și atunci trebuie căutat un alt mijloc de a obține aceste mișcări. Conform ecuației a IV -a a lui Maxwell, făcând abstracție de curentul de deplasare, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ și dacă renunțăm la probele fotonice și considerăm împrăștierea inelastică de electroni, atunci ne putem imagina că densitatea de curent electronic \mathbf{J} va induce un dipol toroidal, adică termenul dominant în Hamiltonianul de interacție este proporțional cu \mathbf{J} (densitatea de curent) \times \mathbf{T} (dipolul toroidal).

Ne vom strădui în cursul lucrării să prezentăm acest punct, adică al posibilității excitării mișcărilor colective toroidale, sau cu componente toroidale importante prin probe electronice de diferite energii.

Existența unor mișcări cu vârtejuri inelare, asociate momentelor toroidale era cunoscută înainte ca autorul să fie implicat în cercetările care au dus la redactarea tezei de dizertație [Sem81], [BalMik88], însă nu erau investigate în detaliu proprietățile lor și nu erau calculate secțiunile care pot duce la excitarea acestor moduri. În colaborare cu S.I.Bastrukov și A.V.Sușkov de la IUCN Dubna am inițiat investigarea proprietăților modurilor toroidale de tip dipolar în cadrul Dinamicii Fluidului Nuclear și am calculat factorii de formă asociați și secțiunile de fotoabsorbție [BasMiS93]. Prezentarea *in extenso* a acestei referințe este făcută în prima parte a capitolului II.

În afară de mișcările de tip toroidal care constau din excitarea unor componente vorticiale de tip orbital ale curenților nucleari, mai pot exista și moduri de excitare ale momentelor magnetice ale nucleonilor, astfel încât să apară structuri de tip spin - flip electric, cum ar fi de exemplu o vibrație în antifază a unor spini protonici și neutronici în raport cu spinii , orientați opus, a restului de protoni și neutroni din nucleu. Acesta este un analog nuclear al așa numitului lanț elicoidal de spini, introdus de Zeldovici și despre care am vorbit în 1.1. Astfel de excitații au fost investigate teoretic și experimental în trecut, însă până la lucrarea de față nu s-a subliniat caracterul electromagnetic de tip toroidal al acestora.

Considerații privind aceste excitații toroidale dependente de spin și posibilitatea observării lor în procese de împrăștiere inelastică cu electroni sunt prezentate în ultima parte a capitolului II.

În capitolul III vom examina posibilitatea apariției momentelor toroidale de tranziție în excitarea unor mișcări colective de joasă energie. Vom arăta că momentele toroidale pot apărea și pentru excitații care nu au o structură de genul celor examinate în capitolul II.

În prima parte a capitolului III vom studia cazul Rotatorului Riemann și vom calcula multipolii electromagnetici, inclusiv cei toroidali, care sunt activi în tranziție și vom sublinia dependența esențială a momentului cuadripolar toroidal de tranziție de vorticitate. Deasemenea vom mai studia în acest capitol problema depărtării de la domeniul de valabilitate al teoremei lui Siegert pentru diferite modele nucleare fenomenologice. Expunerea din această parte a capitolului III se bazează pe o lucrare publicată foarte recent [Mi95].

Secțiunile diferențiale de electroexcitare, care permit separarea factorilor de formă toroidali, sunt calculate pentru procese inclusive (e, e') la unghiuri de 180° și în reacții de coincidență ($e, e'\gamma$).

În introducerea acestei lucrări prezentăm formalismul clasic al dezvoltării multipolare introdusă de Dubovik și Ceșkov și vom încheia cu un capitol care enumeră pe scurt rezultatele originale prezentate în cuprinsul lucrării.

2

Momentul toroidal al unei distribuții nestatice de sarcini și curenți

Să presupunem că densitățile de sarcini și curenți sunt funcții periodice de timp : $\rho_0 \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{J}_0 \exp(-i\omega t)$. În cele ce urmează vom omite factorul $\exp(-i\omega t)$. Legea continuității ne permite să scriem că

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho \quad (2.1)$$

Conform cărții lui Rose [Ro55], dezvoltarea potențialului vector după stările de moment cinetic bine definit este

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi ik}{c} \sum_{\lambda\mu\tau} a_{\lambda\mu}(\tau) F_{\lambda\mu}(\tau) \quad (2.2)$$

iar potențialul scalar

$$\phi = 4\pi ik \sum_{\lambda\mu} h_{\lambda}(kr) (-i)^{\lambda} Y_{\lambda\mu} M_{\lambda\mu} \quad (2.3)$$

Cele două potențiale sunt legate între ele prin condiția Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

pentru a putea obține ecuații de undă decuplate, adică

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0 \quad (2.5)$$

și

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (2.6)$$

Cele trei soluții fundamentale $A_{\lambda\mu}(\tau)$ ($\tau = 1, 2, 3$) ale ecuației Helmholtz vectoriale (2.5) sunt date de

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\lambda\mu}(L) &= \frac{(-i)^{\lambda+1}}{\sqrt{2\lambda+1}} \left(\delta_{\lambda'\lambda-1}\sqrt{\lambda} + \delta_{\lambda'\lambda+1}\sqrt{\lambda+1} \right) h_{\lambda'}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu*}(\theta, \phi) \\ &= \frac{(-i)^{\lambda+1}}{k} \nabla h_{\lambda}(kr) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\lambda\mu}(E) &= \frac{(-i)^{\lambda+1}}{\sqrt{2\lambda+1}} \left(\delta_{\lambda'\lambda-1}\sqrt{\lambda+1} - \delta_{\lambda'\lambda+1}\sqrt{\lambda} \right) h_{\lambda'}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu*}(\theta, \phi) \\ &= -\frac{(-i)^{\lambda}}{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \nabla \times \left(\mathbf{L} h_{\lambda}(kr) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{a}_{\lambda\mu}(M) = (-i)^{\lambda} h_{\lambda}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu*}(\theta, \phi) = -\frac{(-i)^{\lambda}}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \nabla \times h_{\lambda}(kr) \mathbf{L} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \quad (2.9)$$

unde $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ este operatorul moment cinetic. Soluția (2.7) cu $\tau = L$ este de tip longitudinal, (2.8) cu $\tau = E$ este de tip transversal electric sau poloidal, iar $\tau = M$ (2.9) este de tip transversal magnetic sau torsional.¹

Ne vom referi la $F_{\lambda\mu}(\tau)$ ca multipoli longitudinali $L_{\lambda\mu}$, electrici $T_{\lambda\mu}^{el}$ și magnetici $T_{\lambda\mu}^{mag}$. În cele ce urmează ne vor fi extrem de necesare expresiile explicite ale lui $F_{\lambda\mu}(\tau)$

$$L_{\lambda\mu} = \frac{i^{\lambda+1}}{\sqrt{2\lambda+1}} \left(\delta_{\lambda'\lambda-1}\sqrt{\lambda} + \delta_{\lambda'\lambda+1}\sqrt{\lambda+1} \right) \int d\mathbf{r} j_{\lambda'}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.10)$$

$$T_{\lambda\mu}^{el} = \frac{i^{\lambda+1}}{\sqrt{2\lambda+1}} \left(\delta_{\lambda'\lambda-1}\sqrt{\lambda+1} - \delta_{\lambda'\lambda+1}\sqrt{\lambda} \right) \int d\mathbf{r} j_{\lambda'}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

$$T_{\lambda\mu}^{mag} = i^{\lambda} \int d\mathbf{r} j_{\lambda}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

În ceea ce privește soluția ecuației scalare Helmholtz (2.5), se observă că aceasta poate fi exprimată după multipolii Coulombieni

$$M_{\lambda\mu} = i^{\lambda} \int d\mathbf{r} j_{\lambda}(kr) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.13)$$

Ca urmare a ecuației de continuitate (2.1), multipolul longitudinal (2.10) este proporțional cu cel Coulombian (2.13)

$$L_{\lambda\mu} = -\frac{\omega}{k} M_{\lambda\mu} \quad (2.14)$$

¹Deseori în literatură se folosește termenul de toroidal și nu torsional. Am preferat ultima denumire pentru a evita o posibilă confuzie a cititorului nefamiliarizat cu momentele toroidale care sunt asociate soluției poloidale și nu toroidale ale ecuației Helmholtz (2.5).

În cazul în care $k \rightarrow 0$, multipolii devin

$$L_{\lambda\mu} \approx (ik)^\lambda \frac{i\sqrt{\lambda}}{(2\lambda+1)!!} \int d\mathbf{r} r^{\lambda-1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^\mu(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.15)$$

$$T_{\lambda\mu}^{el} \approx (ik)^\lambda \frac{i\sqrt{\lambda+1}}{(2\lambda+1)!!} \int d\mathbf{r} r^{\lambda-1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^\mu(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.16)$$

$$T_{\lambda\mu}^{mag} \approx (ik)^\lambda \frac{1}{(2\lambda+1)!!} \int d\mathbf{r} r^{\lambda-1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.17)$$

Din (2.15) și (2.17) rezultă că pentru $k \rightarrow 0$, multipolii longitudinal și electric sunt proporționali (teorema lui Siegert)

$$T_{\lambda\mu}^{el} \approx \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} L_{\lambda\mu} \quad (2.18)$$

Este interesant de văzut ce se întâmplă în absența densității de sarcină $\rho_0 = 0$. În acest caz potențialul vector va satisface condiția de etalonare $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, iar multipolii longitudinali (2.10) sunt egali cu zero, în virtutea lui (2.14). Într-adevăr, aplicând divergența lui (2.2) și ținând cont de (I.A.7) și $\nabla \cdot \mathbf{a}_{\lambda\mu}(E) = \nabla \cdot \mathbf{a}_{\lambda\mu}(M) = 0$, avem

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{4\pi k}{c} \sum_{\lambda\mu} (-i)^\lambda h_\lambda(kr) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) L_{\lambda\mu} \quad (2.19)$$

Cum termenii acestei sume sunt liniar independenți, $L_{\lambda\mu} = 0$ dacă $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Din $L_{\lambda\mu} = 0$, rezultă, cf. (2.10)

$$\int d\mathbf{r} j_{\lambda-1}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^\mu(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \int d\mathbf{r} j_{\lambda+1}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^\mu(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.20)$$

Substituind această relație în (2.11), obținem

$$T_{\lambda\mu}^{el} = -i^{\lambda+1} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \int d\mathbf{r} j_{\lambda+1}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^\mu(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.21)$$

Dacă luăm limita $k \rightarrow 0$ în (2.21), vedem că

$$T_{\lambda\mu}^{el} \approx -\frac{(ik)^{\lambda+1}}{(2\lambda+3)!!} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \int d\mathbf{r} r^{\lambda+1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^\mu(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.22)$$

Este evident că multipolul electric (2.22) nu coincide cu cel dat de (2.16) pentru $k \rightarrow 0$. Esența acestei inconsistențe trebuie căutată în teorema lui Siegert (2.18), care nu mai este valabilă în cazul particular $\rho_0 = 0$. Deci pentru o astfel de configurație vor lipsi momentele multipolare Coulombiene

$$Q_{\lambda\mu} \approx \frac{(2\lambda+1)!!}{(ik)^\lambda} M_{\lambda\mu}(k \rightarrow 0) \quad (2.23)$$

Dacă combinăm (2.10), (2.13), (2.14) și (2.21) găsim că

$$T_{\lambda\mu}^{el} = -\frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} M_{\lambda\mu} - i^{\lambda+1} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \int d\mathbf{r} j_{\lambda+1}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.24)$$

sau introducând momentele multipolare Coulombiene (2.23)

$$T_{\lambda\mu}^{el} = -\frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \frac{(ik)^{\lambda}}{(2\lambda+1)!!} Q_{\lambda\mu} + k^2 T_{\lambda\mu}^{tor} \quad (2.25)$$

Cantitatea

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu}^{tor} &= -\frac{\omega}{k^3} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \left(M_{\lambda\mu} - \frac{(ik)^{\lambda}}{(2\lambda+1)} Q_{\lambda\mu} \right) \\ &\quad - \frac{1}{k^2} i^{\lambda+1} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \int d\mathbf{r} j_{\lambda+1}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

este multipolul toroidal. Pentru $k \rightarrow 0$ obținem momentul multipolar toroidal

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda\mu} &\approx \frac{(2\lambda+1)!!}{(ik)^{\lambda-1}} T_{\lambda\mu}^{tor}(k \rightarrow 0) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \int d\mathbf{r} r^{\lambda+1} \left[\mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu} + \frac{2\sqrt{\lambda/\lambda+1}}{2\lambda+3} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu} \right] \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Revenind la cazul $\rho_0 = 0$, observăm că multipolul toroidal (2.26) are exact aceeași expresie cu multipolul electric (2.21), abstracție făcând de factorul k^2 . Pentru un solenoid toroidal [AD92], dat de ecuația

$$(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$$

introducem coordonatele \tilde{R}, ψ

$$\rho = d + \tilde{R} \cos \psi, \quad z = \tilde{R} \sin \psi$$

și considerăm un curent poloidal periodic care curge pe suprafața torului, fiecare spiră aflându-se în plan $\phi = \text{constant}$, a cărui densitate este

$$\mathbf{J}^p = -\frac{IN}{2\pi} \frac{\delta(\tilde{R} - R)}{d + R \cos \psi} \mathbf{n}_{\psi} \quad (2.28)$$

unde N este numărul total de spire înfășurate pe tor, iar I este curentul într-o spiră, \mathbf{n}_{ψ} este vectorul tangent la suprafața sferei și care se află în planul $\phi = \text{constant}$

$$\mathbf{n}_{\psi} = \mathbf{n}_z \cos \psi - (\mathbf{n}_x \cos \phi + \mathbf{n}_y \sin \phi) \sin \psi$$

În acest caz

$$L_{\lambda\mu} = T_{\lambda\mu}^{mag} = 0 \quad (2.29)$$

și

$$T_{\lambda\mu}^{el} = T_{\lambda\mu}^{tor} = \delta_{\mu 0} a_{\lambda}(E) \quad (2.30)$$

unde

$$a_{\lambda}(E) = -\frac{INR}{\sqrt{2\pi}} \frac{i^{\lambda+1}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2\lambda+3}} \left(\sqrt{\lambda+1} F_{\lambda+1}^0 - \sqrt{\lambda+2} F_{\lambda+1}^1 \right) \quad (2.31)$$

cu $F_{\lambda+1}^0$ și $F_{\lambda+1}^1$ funcții care se calculează numeric

$$F_{\lambda+1}^0 = \int d\psi j_{\lambda+1}(k\rho) P_{\lambda+1}\left(\frac{R \sin \psi}{\rho}\right) \cos \psi \quad (2.32)$$

$$F_{\lambda+1}^1 = \int d\psi j_{\lambda+1}(k\rho) P_{\lambda+1}^1\left(\frac{R \sin \psi}{\rho}\right) \sin \psi \quad (2.33)$$

iar $\rho = (d^2 + R^2 + 2dR \cos \psi)^{1/2}$. Pentru o astfel de configurație $\rho = 0$, cf. (2.1) și atunci putem trage concluzia că densitatea de curent poloidal (2.28) radiază numai multipoli electrici și mai precis toroidali.

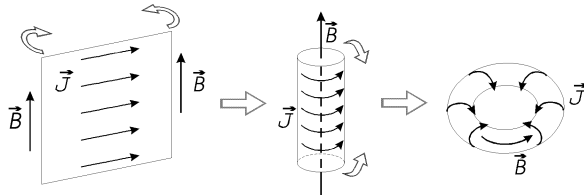


Figura 2.1: Transformările succesive ale unei distribuții plane de curenți în solenoizi cilindric și toroidal corespunzătoare unui câmp magnetic autoecranat față de exterior.

În încheiere, dăm un exemplu foarte simplu de a obține o distribuție de curenți poloidal de tipul lui (2.28). Pentru aceasta considerăm două transformări topologice ale unei distribuții plane de curenți : I. înfășurarea planului pe un cilindru astfel încât curenții să se poată mișca pe suprafața acestuia iar câmpul magnetic rezultat să fie paralel cu

generatoarea cilindrului; II. unirea celor două capete ale cilindrului care va duce la constituirea unui solenoid toroidal cu o distribuție poloidală de curenți și un câmp magnetic toroidal, capturat în interiorul solenoidului așa cum se vede în fig.(2.1)

Este interesant de notat că dacă am schimba între ele rolurile câmpului magnetic \mathbf{B} și al densității de curent \mathbf{J} , am obține în final un solenoid toroidal cu o distribuție poloidală a câmpului magnetic, care corespunde unui moment magnetic de dipol $\boldsymbol{\mu}$ în locul dipolului toroidal \mathbf{T} obținut din distribuția poloidală a curentului. Din acest punct de vedere putem vorbi de un cuplu (\mathbf{J}, \mathbf{B}) de *variabile canonice* \dot{q} conjugat cuplului $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T})$ de *impulsuri* care apar în Hamiltonianul de interacție pentru sisteme nerelativiste care satisfac principiul minimei acțiuni [Gol59]

$$H_{int} = \sum_i p_i \dot{q}_i = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \quad (2.34)$$

Anexa I.A

Armonicele sferice vectoriale

Armonicele sferice vectoriale, sau vectorii sferici $\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\theta, \phi)$ sunt tensori sferici de rangul întâi a căror aplicații în găsirea soluțiilor undelor, dar și a altor ecuații ale fizicii matematice în coordonate sferice se arată a fi foarte utile [BenS81], [Ro55]. Dacă $\lambda = j$, $\lambda' = l$ și $\mu = m$, atunci vectorii sferici sunt funcții proprii ale operatorilor \mathbf{J}^2 , J_z , \mathbf{L}^2 și \mathbf{S}^2 unde \mathbf{L} - operatorul moment cinetic, \mathbf{S} - operatorul spin 1, iar $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ - operatorul momentului cinetic total

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) &= j(j+1) \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) \\ J_z \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) &= m \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) \\ \mathbf{L}^2 \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) &= l(l+1) \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) \\ \mathbf{S}^2 \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) &= 2 \mathbf{Y}_{jl}^m(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (\text{I.A.1})$$

Prin urmare vectorii sferici $\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu$ pot fi scriși în forma

$$\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\theta, \phi) = (-)^{\lambda'-1} \sqrt{2\lambda+1} \sum_{\mu'\nu} \begin{pmatrix} \lambda' & 1 & \lambda \\ \mu' & \nu & -\mu \end{pmatrix} Y_{\lambda'\mu'}(\theta, \phi) \boldsymbol{\xi}_\nu \quad (\text{I.A.2})$$

Pentru un λ dat, λ' poate avea valorile $\lambda' = \lambda, \lambda \pm 1$. În cazul, când $\lambda = 0$, mărimea λ' poate avea numai valoarea $\lambda' = 1$. Indicele μ parcurge valorile $\mu = -\lambda, -\lambda+1, \dots, \lambda-1, \lambda$.

Prin conjugarea complexă, vectorul sferic se transformă după cum urmează

$$\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\theta, \phi) = (-)^{\lambda+\lambda'+\mu+1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{-\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.3})$$

iar prin inversia sistemului de coordonate

$$\hat{P}_r \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\theta, \phi) = -\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-)^{\lambda'+1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.4})$$

Prin rotirea sistemului de coordonate, caracterizată de unghiurile Euler α, β, γ , vectorii sferici se transformă după formula

$$\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu'}(\theta', \phi') = \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi) = \sum_{\mu} \mathcal{D}_{\mu\mu'}^{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.5})$$

Mărimile $r^{\lambda'} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi)$ sunt soluții ale ecuației Laplace

$$\Delta (r^{\lambda'} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi)) = 0 \quad (\text{I.A.6})$$

ceea ce înseamnă că toate componentele vectorilor de tipul $r^{\lambda'} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi)$ sunt polinoame armonice de gradul λ' . Deasemenea, mărimile $z_{\lambda'}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi)$ sunt soluții ale ecuației Helmholtz [MF52]

$$(\Delta + k^2) z_{\lambda'}(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi) = 0 \quad (\text{I.A.7})$$

unde $z_{\lambda}(kr)$ este funcția Bessel sferică $j_{\lambda}(kr)$ sau $h_{\lambda}(kr)$ [AS64].

Vectorii sferici satisfac o serie de relații diferențiale care sunt exploatate din plin în lucrarea de față. Dacă $f(r)$ este o funcție arbitrară de $r \equiv |\mathbf{r}|$, atunci

$$\begin{aligned} \nabla (f(r) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi) \\ &\quad - \sqrt{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (\text{I.A.8})$$

$$\nabla \cdot (f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi)) = -\sqrt{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda+2}{r} \right) f(r) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.9})$$

$$\nabla \cdot (f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi)) = 0 \quad (\text{I.A.10})$$

$$\nabla \cdot (f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi)) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda-1}{r} \right) f(r) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.11})$$

$$\nabla \times (f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi)) = i\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda+2}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.12})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi)) &= i\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) \\ &\quad + i\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (\text{I.A.13})$$

$$\nabla \times (f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi)) = i\sqrt{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda-1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.14})$$

Mai există o serie de relații funcționale între vectorii sferici care se dovedesc a fi foarte util

$$nY_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.15})$$

$$\mathbf{n}Y_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}}Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.16})$$

$$\mathbf{n}Y_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}}Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.17})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) = i\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}}\mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.18})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) = i\sqrt{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}}\mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi) + i\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda+1}}\mathbf{Y}_{\lambda\lambda+1}^{\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.19})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^{\mu}(\theta, \phi) = i\sqrt{\frac{\lambda+1}{2\lambda+1}}\mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{I.A.20})$$

unde $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ este versorul radial.

Printre formulele integrale care conțin vectori sferici, amintim :

$$\int d\Omega e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi) = 4\pi i^{\lambda'} j_{\lambda}(kr)\mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta_k, \phi_k) \quad (\text{I.A.21})$$

$$\int d\Omega \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu}(\theta, \phi)\mathbf{Y}_{\lambda_1\lambda_1'}^{\mu_1}(\theta, \phi) = \delta_{\lambda\lambda_1}\delta_{\lambda'\lambda_1'}\delta_{\mu\mu_1} \quad (\text{I.A.22})$$

Capitolul II

Rezonanțe Gigant Toroidale

3

Dinamica Fluidului Nuclear.

Pentru a descrie fenomene complexe cum ar fi fisiunea nucleară sau ciocnirile cu ioni grei este necesar atât din punct de vedere al micșorării timpului de calcul dar și al evitării complicării inutile a problemei fizice, să se reducă drastic numărul de variabile conținute în problema de mai multe particule. Spre deosebire de fizica clasică, acest lucru este mai complicat deoarece drumul liber mediu este comparabil cu dimensiunea nucleului.

Modelul Picătură de Lichid are într-adevăr un număr mic de grade de libertate însă este incapabil să descrie corect energia rezonanțelor gigant izoscalare în termeni de vibrații ale suprafeței ale unei picături nucleare, încărcată electric aflată sub influența tensiunii de suprafață. Aceasta deoarece forța de revenire indusă de efectele de suprafață și Coulomb este prea mică și va produce valori joase ale frecvențelor vibrațiilor proprii ale suprafeței nucleare. Ca urmare va apărea o dependență eronată de numărul de masă, adică $E \sim A^{-1/2}$ în loc de $E \sim A^{-1/3}$.

G.F.Bertsch [Be74], [Be75] a propus introducerea unor forțe elastice în nuclee astfel încât rezonanțele gigant izoscalare au putut fi concepute ca vibrații armonice în fază ale fluidelor protonic și neutronic, forța de revenire fiind o consecință a proprietăților elastice ale mediului. O altă observație, de importanță capitală pentru lucrarea de față, făcută de Bertsch, se referă și la caracterul vectorial al câmpurilor de viteze induse de perturbații externe. Astfel, picătura de lichid prezintă un spectru de excitație vibrațional căruia i se asociază un câmp de viteze irotational [BM75]. În realitate nucleul nu se comportă ca un fluid ordinar ci ca un fluid Fermi și în consecință în urma unor perturbații externe pot apărea și oscilații transversale (rotaționale sau de divergență zero) așa cum de exemplu sunt oscilațiile elastice longitudinale și transversale într-o sferă solidă [Lo27], [BenS81] sau oscilațiile curentului electric dintr-o sferă metalică [Str41]. Din teoria mediului continuu se știe că atât oscilațiile longitudinale cât și cele transversale sunt inerente pentru un corp

cu proprietăți de solid elastic ideal.

Această tratare semiclassicală a materiei nucleare care prezintă analogii evidente cu teoria mediului continuu a fost denumită *Dinamica Fluidului Nuclear* (DFN) - Nuclear Fluid Dynamics. Prin urmare natura rezonanțelor gigant izoscalare care după cum am arătat mai sus nu pot fi explicate ca vibrații de tip irotational ale suprafeței nucleare, sunt susceptibile de a fi descrise în cadrul DFN ca manifestări dinamice ale elasticității cuantice.

Deși descrierea mișcărilor colective reclamă cunoașterea amănunțită a diferitelor grade de libertate care compun nucleul, modelul elastic arată că energiile rezonanțelor gigant izoscalare pot fi obținute pe baza unor concepte macroscopice care implică distorsiunea (deformarea) suprafeței Fermi.

În secțiunea următoare vom prezenta abordarea cea mai convenabilă care ne va permite să calculăm energiile pentru rezonanțele gigant izoscalare de diferite multipolarități, atât longitudinale cât și transversale. O rezonanță gigant izoscalară poate fi concepută ca o oscilație colectivă de mică amplitudine, de multipolaritate λ în care protonii și neutronii efectuează o curgere (deplasare) în fază, incompresibilă de tip irotational sau vortical. Nucleonii vor rămâne în orbitele caracterizate de structura lor nodală inițială, apărând în consecință o anizotropie pe suprafața Fermi a distribuției lor de impuls. Nucleonii a căror orbite sunt comprimate ca urmare a deformării își vor mări energia corespunzătoare, în timp ce acei a căror orbite sunt dilatate de deformare își vor micșora energia. Rezultatul net al acestei anizotropii se traduce printr-o creștere a energiei totale a nucleului care va deveni astfel sursa forței de revenire a deplasărilor oscilatorii din nucleu.

3.1 Ecuatiile care guvernează DFN

Ecuatiile fundamentale ale DFN pot fi deduse luându-se limita clasică a ecuațiilor Hartree-Fock dependente de timp (TDHF)

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (3.1)$$

unde $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ este matricea densitate uniparticulă iar \hat{H} este Hamiltonianul uniparticulă care depinde implicit de matricea densitate.

Pentru a obține limita clasică a ecuației (3.1) vom introduce transformata Wigner a matricei densitate [RiSc80]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{s} \rho \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, t \right) e^{-(i/\hbar)\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}} \quad (3.2)$$

Funcția $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ este analoagă funcției de distribuție din teoria cinetică clasică și dă probabilitatea de a găsi un nucleon cu impulsul \mathbf{p} în punctul de rază vectorială \mathbf{r} la momentul t .

Transformarea inversă a funcției Wigner este dată de

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} f\left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \mathbf{p}, t\right) e^{(i/\hbar)\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (3.3)$$

Transformata Wigner a produsului a doi operatori uniparticulă A și B se poate scrie sub forma

$$(AB)_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{s} \int d\mathbf{x} \int d\boldsymbol{\pi} \int d\mathbf{q} e^{-(i/\hbar)(\mathbf{p} - \boldsymbol{\pi})\cdot\mathbf{s}} e^{-(i/\hbar)\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'} \times \\ A_W\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{x}'}{2} + \frac{\mathbf{s}}{4}, \boldsymbol{\pi} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \cdot B_W\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{x}'}{2} - \frac{\mathbf{s}}{4}, \boldsymbol{\pi} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \quad (3.4)$$

care se mai poate exprima

$$(AB)_W = e^{\frac{\hbar}{2i}(\nabla_r^A \cdot \nabla_p^B - \nabla_p^A \cdot \nabla_r^B)} A_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) B_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (3.5)$$

Luând transformata Wigner a ecuației (3.1) și folosind (3.5) ajungem la relația

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} \sin\left(\frac{\hbar}{2}\right) (\nabla_r^H \cdot \nabla_p^f - \nabla_p^H \cdot \nabla_r^f) H_W \cdot f \quad (3.6)$$

H_W fiind transformata Wigner a Hamiltonianului Hartree-Fock. Pentru a evita complicarea problemei vom presupune că potențialul este local și deci H_W este versiunea clasică a aceluiași Hamiltonian:

$$H_W = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r})$$

unde U este potențialul din care derivă toate forțele care acționează asupra nucleonului.

Ecuția (3.6) se va scrie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_r f = \frac{2}{\hbar} \sin\left(\frac{\hbar}{2}\right) \nabla_r^U \cdot \nabla_p^f \cdot U(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (3.7)$$

În continuare prin neglijarea termenilor de ordin superior în dezvoltarea în serie Taylor a funcției sinus din (3.7) se obține *aproximația semiclassicală a teoriei Hartree-Fock* și vom avea

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_r f - \nabla_r U(\mathbf{r}) \cdot \nabla_p f = 0 \quad (3.8)$$

Această ecuație este cunoscută în fizica statistică a fenomenelor de transport ca "*ecuația Boltzmann fără termen de ciocnire*". Ea reprezintă o ecuație de mișcare pentru $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

În principiu ar părea nejustificat să definim o funcție de distribuție în mecanica cuantică deoarece principiul de incertitudine interzice specificarea simultană a poziției și impulsului unei particule. Trebuie subliniat că nu este necesară specificarea poziției unei particule cu o precizie mai mare decât lungimea de undă a perturbației. În consecință, atunci când perturbația variază numai pe distanțe macroscopice putem specifica impulsul particulei cu precizie microscopică [KB62].

Derivata în raport cu timpul a lui f este deci calculată luând în considerare următoarele efecte:

1. Particulele cu impuls \mathbf{p} se vor mișca în interiorul și în afara elementului de volum spațial centrat în vârful vectorului \mathbf{r} .
2. Ca urmare a forțelor medii care acționează asupra particulelor, impulsul particulelor din interiorul elementului de volum va fi modificat în mod treptat.

Ecuția cu derivate parțiale (3.8) este neliniară și în general greu de integrat chiar și numeric. Pentru a reduce complexitatea acestei ecuații se efectuează o transformare a acesteia în ecuații cuplate pentru variabilele macoscopice cum sunt densitatea masică ρ , cele trei componente ale vitezei medii $u_i(\mathbf{r}, t)$ și cele nouă componente ale tensorului tensiune (presiune) $P_{ij}(\mathbf{r}, t)$. Aceste mărimi fizice sunt introduse ca momente de ordinul p (zero pentru ρ , 1 pentru u_i , 2 pentru P_{ij} , etc.) ale funcției de distribuție în raport cu impulsul \mathbf{p} după cum urmează

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (3.9)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t)u_i(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) p_i \quad (3.10)$$

$$P_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{m} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)(p_i - mu_i)(p_j - mu_j) \quad (3.11)$$

$$P_{i_1..i_n}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{m} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)(p_{i_1} - mu_{i_1}) \dots (p_{i_n} - mu_{i_n}) \quad (3.12)$$

Pentru a obține sistemul de ecuații cuplate ale momentelor de ordin p (3.9–3.12), se integrează ecuația lui Boltzmann după impuls cu ponderile 1, p_j/m , $p_i p_j/m^2$ etc. În acest fel se ajunge la ecuația continuității

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.13)$$

ecuația de mișcare, care reprezintă o generalizare a ecuației Euler din Mecanica Fluidelor [LL88]

$$\rho \frac{du_i}{dt} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (3.14)$$

ecuația pentru tensorul presiune

$$\frac{dP_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^3 \left(P_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + P_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial P_{ijk}}{\partial x_k} = 0, \quad (3.15)$$

etc. Aici am folosit noțiunea de derivată materială (totală)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Se mai folosesc deasemenea condițiile la frontieră pentru funcția Wigner : $f \rightarrow \infty$ la $p \rightarrow \infty$. Ecuatiile de mai sus reprezintă exprimarea cantitativă de conservare a masei, impulsului, etc.

Se observă că fiecare din ecuațiile (3.13–3.15) conține termeni care cuplează aceste ecuații cu acelea pentru tensorii de rang mai mare. Astfel, derivata temporală a densității este legată de viteza materiei nucleare, a cărei derivată temporală este legată de tensorul tensiune, iar derivata în raport cu timpul al acestuia din urmă este legată de tensorul eforturilor de rangul trei.

Pentru a putea rezolva acest lanț de ecuații trebuie aplicată o procedură judicioasă de trunchiere. În cursul acestei lucrări vom adopta așa numita *aproximație a celor treisprezece momente* [NS80], [BG92] care constă în neglijarea ultimului termen din ecuația (3.15), adică a tensorului de rang superior sau, cu alte cuvinte, o restrângere la momentele de ordin 0, 1, 2 ale ecuației Boltzmann.

În lucrarea de față vom aplica metoda semiclassicală ecuației Boltzmann în aproximația celor treisprezece momente la rezonanțe gigant de tip izoscalar, care sunt mișcări colective de mică amplitudine în care protonii și neutronii efectuează o curgere sau deplasare în fază de tip incompresibil.

În alte lucrări [HGWL82], [BalMik88] se arată că deși aproximația pomenită mai sus dă rezultate care sunt într-o bună concordanță cu datele experimentale pentru energiile rezonanței gigant cuadrupolare, în cazul în care se iau în considerare momentele până la ordinul patru, obținându-se deci corecții la tensorul tensiunilor elastice, se obțin rezultate teoretice care sunt într-un sensibil dezacord cu datele experimentale. În plus termenul care cuplează ecuația pentru un tensor de rang n cu ecuația următoare din lanțul de ecuații care conține tensorul de rang $n + 1$, include un factor multiplicativ dependent de viteză $p_{i_{n+1}} - mu_{i_{n+1}}$ sub integrală. În aproape toate aplicațiile fizice ale teoriei mișcării colective nucleare energia mișării de zero a nucleonilor ($\frac{3}{5}\epsilon_F \simeq 21\text{MeV}$) este mult mai mare decât energia asociată curgerii colective, adică $|p_i| \gg |u_i|$, și termenii de cuplaj nu sunt în mod evident mici. Cu toate acestea aproximația celor treisprezece momente s-a

dovedit de succes în explicarea unor date experimentale a excitațiilor colective, nu numai în fizica nucleară, dar și în fizica plasmei [AP80].

Intorcându-ne la ecuațiile (3.13–3.15), facem observația că soluția problemei vibrațiilor normale presupune cunoașterea prealabilă a densității de echilibru (a stării fundamentale) și a părții diagonale a tensorului tensiune la echilibru, adică a presiunii P_0 . Aceste cantități vor fi deci parametrii de intrare ai metodei pe care o folosim și pot fi deduși dintr-o tratare microscopică self-consistentă.

Pentru modelul de gaz Fermi avem

$$\rho_0 = \frac{3m}{4\pi r_0^3} \quad (3.16)$$

și

$$P_0 = \frac{2}{3}\epsilon_F = \frac{1}{3}\rho_0\langle v^2 \rangle \quad (3.17)$$

unde $\langle v^2 \rangle = \frac{3}{5}v_F^2$ este viteza pătratică medie a mișcării Fermi uniparticulă, iar $v_F = \frac{\hbar}{2mr_0}(9\pi)^{1/3}$ viteza Fermi.

Mai devreme am vorbit despre condiția de incompresibilitate a continuumului nuclear, adică $\rho = \rho_0 = \text{const}$ În plus nu există curgere colectivă în starea de echilibru u_0 iar tensorul tensiune se scrie sub forma

$$P_{ij} = P_0 + p_{ij} \quad (3.18)$$

Aici p_{ij} reprezintă componentele diagonale ale tensorului presiune care dau deformațiile cuadrupolare ale sferei Fermi în spațiul impulsurilor.

Presupunerea de mai sus ne conduc la ecuațiile DFN linearizate

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.19)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + P_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Ecuațiile (3.19) și (3.20) sunt aceleași care guvernează și dinamica Modelului Picătură de Lichid : prima dintre ele reprezintă ecuația continuității, iar a doua ecuația lui Euler. Evoluția liniară a tensiunii elastice este descrisă de ecuația (3.21). Un nucleu aflat în starea sa fundamentală va fi modelat în această abordare ca un glob de tip elastic care conține un continuum Fermi incompresibil cu gradele de spin și izospin saturate. Excitațiile rezonante vor fi specificate de forma vitezei nucleare.

Este convenabil să scriem deplasarea dx_i a materiei nucleare, într-un punct \mathbf{r} în interiorul nucleului, ca

$$dx_i = a_i^\lambda(\mathbf{r})d\alpha_\lambda \quad (3.22)$$

sau, alternativ prin viteza medie

$$u_i = a_i^\lambda(\mathbf{r})\frac{d\alpha_\lambda}{dt} \quad (3.23)$$

unde $a_i^\lambda(\mathbf{r})$ este câmpul deplasărilor instantanee din continuumul Fermi, iar α_λ este amplitudinea dependentă de timp a oscilațiilor armonice ($\alpha_\lambda \sim \sin \omega_\lambda t$) asociate fenomenului rezonant pe care îl vom studia. Această amplitudine poate fi interpretată ca o variabilă colectivă în acord cu tratarea lui Bohr și Mottelson a vibrațiilor nucleare proprii [BM75].

Se poate arăta că ecuațiile (3.19–3.21) se reduc la ecuația undelor pentru fluctuațiile vitezei u_i . Dacă derivăm (3.20) în raport cu timpul t , (3.21) în raport cu poziția x_k , substituind una în cealaltă, și facem uz de ecuația (3.19) obținem

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = P_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \quad (3.24)$$

După care, folosind ansatzul (3.23) ajungem la ecuația Helmholtz pentru undele sferice staționare

$$\frac{\partial^2 a_i^\lambda}{\partial x_i^2} + k^2 a_i^\lambda = 0 \quad (3.25)$$

unde $k = \sqrt{\rho\omega^2/P_0}$ este numărul de unde. În aproximația lungimilor de undă mari, care este justificată în cazul proceselor nucleare de energie joasă, ultima ecuație se transformă prin sumare după cele trei componente vectoriale în ecuația Laplace pentru câmpul solenoidal al deplasărilor

$$\Delta \mathbf{a}^\lambda = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{a}^\lambda = 0 \quad (3.26)$$

Deci se consideră că $kd \ll 1$, d fiind de ordinul dimensiunii nucleului.

Ecuația Helmholtz (2.5) într-un sistem cu axă polară fixă nu va admite decât două soluții independente, deoarece soluția longitudinală este eliminată ca urmare a condiției de incompresibilitate (3.19). Avem prin urmare o soluție poloidală¹, cf. (2.7) și (2.8)

$$\mathbf{a}_p^\lambda(\mathbf{r}) = N_p^\lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} r^\lambda Y_{\lambda 0}(\theta, \phi) = N_p^\lambda (\lambda + 1) \nabla r^\lambda Y_{\lambda 0}(\theta, \phi) \quad (3.27)$$

și una torsională (esențialmente de forfecare, adică transversală), cf. (2.9)

$$\mathbf{a}_t^\lambda(\mathbf{r}) = N_t^\lambda \nabla \times \mathbf{r} r^\lambda Y_{\lambda 0}(\theta, \phi) \quad (3.28)$$

¹Adoptăm aici nomenclatura introdusă de Elssasser [El46a], [El46b] pentru clasificarea câmpurilor vectoriale toroidale și poloidale în legătură cu magnetismul terestru, conform secțiunii 2

Figura 3.1: Secțiuni în planul meridional pentru câmpurile de deplasări transversale : (a) oscilații rotatorii 1^+ , (b) *Twist* (răsucire în antifază a celor două emisfere) 2^- și (c) torsiune octupolară 3^+ .

Așa cum s-a subliniat mai sus, în DFN, excitațiile de tip rezonant se clasifică după forma vitezei medii (3.23). Astfel, soluția poloidală descrie distorsiuni armonice ale forme nucleare. Aceste mișcări sunt responsabile de rezonanțele de tip electric deoarece \mathbf{a}_p^λ este un câmp vectorial de paritate $\pi = (-)^\lambda$. Soluția toroidală descrie mișcări de tip torsional (răsuciri oscilatorii ale continuumului Fermi) și corespund la rezonanțe de tip magnetic deoarece \mathbf{a}_t^λ este un câmp pseudovectorial de paritate $\pi = (-)^{\lambda+1}$. În fig.3.1 sunt înfățișate mișcărilor macroscopice de tip torsional și de multipolarități $\lambda = 1, 2$ și 3 . Pentru $\lambda = 1$ avem de a face cu niște oscilații de tip rotatoriu ale sferei nucleare în raport cu axa polară fixă și de paritate pozitivă. Când $\lambda = 2$ apar așa numitele rezonanțe *twist* -răsucire, de paritate negativă [HE79], [BG92].

Mai notăm că în limita lungimilor de undă mari, soluția poloidală este simultan irotațională și liberă de divergențe, adică $\nabla \cdot \mathbf{a}_p^\lambda = \nabla \times \mathbf{a}_p^\lambda = 0$, în timp ce soluția torsională este pur solenoidală, adică $\nabla \cdot \mathbf{a}_t^\lambda = 0$ dar $\nabla \times \mathbf{a}_t^\lambda \sim \mathbf{a}_p^\lambda \neq 0$.

Urmând ideile din referințele [NS80], [BG92] vom arăta că ecuațiile (3.18–3.21) se pot reduce la Hamiltonianul standard pentru vibrații normale. Pentru aceasta multiplicăm ecuația (3.20) cu u_i și integrăm pe volumul nucleului

$$\int d\mathbf{r} \rho_0 u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} - \int d\mathbf{r} p_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 \quad (3.29)$$

unde termenul al doilea a fost integrat prin părți și s-a folosit condiția de anulare a câmpului de depalsări și tensiuni pe frontiera nucleului. Urmând prescripția folosită și în

alte referințe [HE79], vom neglija efectele de respingere Coulombiană, ale tensiunii superficiale precum și efectele de structură. Cu alte cuvinte, se consideră că energia potențială a mișcărilor colective (forța de revenire elastică) este determinată în principal de rigiditatea suprafeței Fermi. Interpretarea dinamic fluidă a forței de revenire a vibrațiilor nucleare este legată de proprietățile elastice ale orbitelor uniparticulă. Conform ipotezei de scalare - *scaling hypothesis*, se presupune că perturbațiile externe (cu energiile rezonanțelor gigant $\sim 6 < E_{g.r.} < 20$ MeV) dau naștere unor distorsiuni coerente ale orbitelor uniparticulă sau, cu alte cuvinte, induc deformări locale ale formei sferice a unei distribuții Fermi - *distorted Fermi surface model*. În volumul nucleului aceste distorsiuni sunt asociate cu câmpul de deformări elastice p_{ij} . Aceste tensiuni tind să reinstaureze echilibrul inițial al formei sferice a suprafeței Fermi, și deci, să readucă nucleul în forma sa inițială.

Introducând (3.23) în (3.21) tensorul tensiunilor devine

$$p_{ij} = -P_0 \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \alpha_\lambda \quad (3.30)$$

Din această ecuație se observă că tensorul deformărilor elastice posedă simetrie cuadrupolară ca și tensorul moment cuadrupolar : urma lui p_{ij} este zero ca urmare a ipotezei de incompresibilitate. Astfel, elasticitatea coerentă a orbitelor uniparticulă (deformări cuadrupolare ale sferei Fermi) este factorul fizic determinant al naturii cuantice a forței elastice de revenire pentru vibrațiile normale corespunzătoare rezonanțelor gigant (legea Hook cuantică). Pe baza acestui raționament DFN poate fi considerată un exemplu al teoriei cuantice a elasticității.

În continuare, substituind (3.25) și (3.30) în (3.29) obținem Hamiltonianul (energia) oscilatorului armonic

$$H = \frac{B_\lambda \dot{\alpha}_\lambda^2}{2} + \frac{C_\lambda \alpha_\lambda^2}{2} \quad (3.31)$$

căruia îi corespunde Lagrangeanul

$$L = \frac{B_\lambda \dot{\alpha}_\lambda^2}{2} - \frac{C_\lambda \alpha_\lambda^2}{2} \quad (3.32)$$

Primul termen din ecuația (3.31) reprezintă energia cinetică T , iar mărimea B - coeficientul de inerție sau masă. Al doilea termen în (3.31) - energia potențială de deformare V , iar C se numește coeficientul de rigiditate. Se introduce variabila impuls conjugat coordonatei colective α

$$\pi = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_\lambda} (T - V) = B \dot{\alpha}_\lambda \quad (3.33)$$

și rescriem Hamiltonianul sub forma

$$H = \frac{\pi_\lambda^2}{2B_\lambda} + \frac{C_\lambda \alpha_\lambda^2}{2} \quad (3.34)$$

Ecuțiile (3.31) și (3.33) sunt aceleași ca în cazul oscilatorului clasic. În cazul sistemelor cuantice operatorii α și π , care sunt conjugați hermitici, satisfac relația de comutare

$$[\pi_\lambda, \alpha_\lambda] = -i\hbar\delta_{\lambda\lambda'} \quad (3.35)$$

iar spectrul energetic va fi dat de formula pentru oscilatorul armonic cuantic unidimensional

$$E_{n,\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_\lambda$$

cu frecvența clasică

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}} \quad (3.36)$$

amplitudinea oscilațiilor de zero fiind

$$\alpha_0 \equiv \langle n=0 | \alpha^2 | n=0 \rangle^{1/2} = \left(\frac{\hbar}{2BC}\right)^{1/2} \quad (3.37)$$

Prin identificare, coeficienții de inerție B și rigiditate C sunt calculați cu ajutorul integralelor

$$B_\lambda = \int d\mathbf{r} \rho_0 a_i^\lambda a_j^\lambda \quad (3.38)$$

$$C_\lambda = \int d\mathbf{r} P_0 \frac{\partial a_i^\lambda}{\partial x_j} \left(\frac{\partial a_i^\lambda}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j^\lambda}{\partial x_i} \right) \quad (3.39)$$

Pe baza considerentelor de mai sus, Bertsch [Be75] a arătat că energiile rezonanțelor cuadrupolare izoscalare sunt bine reproduse pe întreg domeniul tabelului lui Mendeleev dacă se alege următorul ansatz pentru câmpul de deplasări : $a_x = -x$, $a_y = -y$, $a_z = 2z$. Este lesne de verificat că acest câmp vectorial este un caz particular al soluției poloidale (3.27), când $\lambda = 2$. Coeficienții de inerție și rigiditate calculați cu ajutorul câmpului cuadrupolar de mai sus sunt

$$B_\lambda = (N_p^\lambda)^2 \lambda M \langle r^{2\lambda-2} \rangle \quad (3.40)$$

$$C_\lambda = (N_p^\lambda)^2 \frac{2}{3} \lambda(\lambda-1)(2\lambda-1) M \langle v^2 \rangle \langle r^{2\lambda-4} \rangle \quad (3.41)$$

unde M este masa nucleului. În acord cu ecuația (3.36) obținem pentru energie

$$E(E\lambda) = \hbar \left[\frac{2}{3} (2\lambda-1)(\lambda-1) \langle v^2 \rangle \frac{\langle r^{2\lambda-4} \rangle}{\langle r^{2\lambda-2} \rangle} \right]^{1/2} \quad (3.42)$$

unde prin $E\lambda$ am arătat că este vorba despre rezonanțe electrice de multipolaritate λ . Folosind aproximația *frontieră abruptă* pentru suprafața nucleului și estimarea pentru

presiunea de echilibru a gazului Fermi, spectrul rezonanțelor electrice izoscalare (3.42) se înlocuiește cu relația [NS80]

$$E(E\lambda) = \hbar\omega_F \left[\frac{2}{5}(2\lambda + 1)(\lambda - 1) \right]^{1/2} = \frac{(9\pi)^{1/3}}{\sqrt{10}m} \left(\frac{\hbar}{r_0} \right)^2 \frac{[(2\lambda + 1)(\lambda - 1)]^{1/2}}{A^{1/3}} \quad (3.43)$$

cu $\omega_F = v_F/R$. Pentru valorile celor trei constante care apar în formulele de mai sus am folosit

$$r_0 = 1.18 \text{ fm}, \quad \hbar = 197.32858 \text{ MeVfm}/c, \quad m = 931.5016 \text{ MeV}/c^2$$

Substituirea acestor valori în (3.43) ne conduce la

$$E(E\lambda) = 28.92[(2\lambda + 1)(\lambda - 1)]^{1/2} A^{-1/3} \text{ MeV}$$

În particular pentru rezonanțele gigant cuadrupolare, octupolare și hexadecupolare de tip izoscalar vom avea

$$E(E2) = 64.7A^{-1/3} \text{ MeV}, \quad E(E3) = 108.2A^{-1/3} \text{ MeV},$$

$$E(E4) = 150.3A^{-1/3} \text{ MeV}$$

Predicțiile de mai sus pentru energiile rezonanțelor gigant de tip izoscalar sunt reprezentate grafic ca funcții de numărul de masă în fig.3.2. În cazul rezonanțelor gigant de tip cuadrupolar calculele reproduc, fără parametri de ajustare, atât valoarea absolută cât și dependența de numărul de masă a energiei cuadrupolare gigant. Totuși pentru nuclee ușoare, curba teoretică se află sensibil deasupra punctelor experimentale, iar factorul de proporționalitate de 64.7 MeV invocat este cu 3 procente mai mare decât valoarea experimentală de 63 MeV.

Mai notăm că acest câmp poloidal de viteze coincide cu cel irotational considerat în Modelul Picătură de Lichid. De aici conchidem că tratarea dinamic fluidă a rezonanțelor electrice izoscalare confirmă binecunoscuta interpretare dată de Tassie [Ta56] excitațiilor colective ale picăturii. Totuși diferența principală dintre abordările dinamic fluide și cele hidrodinamice este dată de tratarea forțelor de revenire elastice a vibrațiilor normale ale sferei nucleare.

Pe baza considerentelor de mai sus, a mai fost prezisă rezonanța 2^- de răsucire (twist) despre care am vorbit mai sus. Acest mod este interpretat în termeni de oscilații (esențialmente transversale) de răsucire, tot de tip cuadrupolar : $a_x = -yz$, $a_y = xz$, $a_z = 0$. Acest câmp vectorial este un caz particular al deplasărilor torsionale (3.28). Subliniem încă o dată că rezonanțele de tip magnetic, cauzate de oscilațiile transversale

Figura 3.2: *Comparație a energiilor rezonanțelor gigant electrice izoscalare determinate experimental cu valorile calculate în DFN. Cercurile pline dau valorile experimentale pentru energiile cuadrupolare gigant.*

(de forfecare) ale nucleonilor, pot fi excitate ca urmare a proprietăților elastice ale materiei nucleare. Caracteristicile dinamice ale rezonanțelor de răsucire sunt reprezentate după cum urmează

$$B_\lambda = (N_t^\lambda)^2 \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2\lambda + 1} M \langle r^{2\lambda} \rangle \quad (3.44)$$

$$C_\lambda = (N_p^\lambda)^2 \frac{1}{3} \lambda(\lambda^2 - 1) M \langle v^2 \rangle \langle r^{2\lambda-2} \rangle \quad (3.45)$$

$$E(M\lambda) = \hbar \left[\frac{1}{3} (2\lambda + 1)(\lambda - 1) \langle v^2 \rangle \frac{\langle r^{2\lambda-2} \rangle}{\langle r^{2\lambda} \rangle} \right]^{1/2} \quad (3.46)$$

Modelul *frontieră abruptă* conduce la următorul spectru de rezonanțe magnetice

$$E(M\lambda) = \hbar\omega_F \left[\frac{1}{5} (2\lambda + 3)(\lambda - 1) \right]^{1/2} = \frac{(9\pi)^{1/3}}{\sqrt{20}m} \left(\frac{\hbar}{r_0} \right)^2 \frac{[(2\lambda + 1)(\lambda - 1)]^{1/2}}{A^{1/3}} \quad (3.47)$$

Așa cum rezultă din (3.47), avem următoarele expresii pentru energiile rezonanțelor magnetice de tip cuadrupolar, octupolar și hexadecupolar magnetice

$$E(M2) = 50A^{-1/3}\text{MeV}, \quad E(M3) = 80A^{-1/3}\text{MeV},$$

Figura 3.3: Valorile calculate teoretic pentru energia rezonanțelor gigant magnetice în funcție de numărul de masă, și comparația cu experimentul pentru modul de răsucire cuadrupolar.

$$E(M4) = 110A^{-1/3}\text{MeV}$$

Predicția de mai sus pentru energiile rezonanțelor magnetice izoscalare este reprezentată grafic ca funcție de numărul de masă în fig.3.3. Am figurat deasemenea comparația estimărilor teoretice cu datele experimentale pentru modul 2^-

Este interesant de adăugat că ambele excitații $E\lambda$ și $M\lambda$ descrise mai sus au o origine volumică, adică toți nucleonii care compun nucleul sunt antrenati în mișcarea colectivă, nu numai cei aflați în vecinătatea suprafeței nucleului. ² În particular acesta este mo-

²În anumite cazuri, când câmpul perturbativ extern penetrează până la o distanță finită în interiorul nucleului, va fi pusă în mișcare numai acea parte a sistemului aflată în vecinătatea suprafeței. Cum densitatea nucleară scade de la centru spre margine, pare atunci firesc să se încerce o idealizare a nucleului ca un miez inert, tare, învelit de un strat de materie mai "moale", care poate fi considerat pentru simplitate ca un lichid. Dacă miezul rigid este asociat nucleonilor aflați în păturile închise, atunci sub influența unor forțe perturbatoare externe (cu energia cel mult egală cu distanța dintre două pături închise vecine) este posibilă obținerea unei descrieri destul de satisfăcătoare a ramurii colective de energii joase a excitațiilor vibraționale în nuclee magice. Aceste concepții sunt specifice Modelului Picătură de Lichid. Totuși ele pot fi incorporate și sistemelor Fermi. Astfel, în lucrarea [BasMa90] se propune așa numitul model *Strat Fermi* care descrie dinamica unui strat sferic lichid într-un sistem Fermi finit, și utilizând prescripțiile elasticității

tivul pentru care constantele arbitrare $N_{p,t}^\lambda$ nu apar în formulele finale pentru energiile rezonanțelor. Acest fapt arată că rezonanțele gigant sunt determinate cu precădere de proprietățile de saturare ale materiei nucleare.

Trebuie deasemenea remarcat că "frecvența Fermi" ω_F este egală cu frecvența de oscilator a modelului în pături uniparticulă $\omega = 41/(A^{1/3}\hbar)s^{-1}$ pentru un nucleu sferic. Într-adevăr, să considerăm limita clasică a modelului în pături cu hamiltonian de oscilator armonic fără termen de cuplaj spin-orbită. Folosind, mai întâi, medierea cuantică și apoi statistică a acestui Hamiltonian și folosind *teorema virialului* (după care $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ pentru oscilatorul armonic), găsim că $\langle v^2 \rangle = \omega^2 \langle r^2 \rangle$. Într-un model simplificat $\langle v^2 \rangle = \frac{3}{5}v_F^2$ și $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5}R^2$. Astfel teorema virialului conduce la $\omega = \omega_F = v_F/R$ [BasMiS93].

Spre deosebire de cazul discutat mai sus al globului elastic incompresibil, problema oscilațiilor normale ale unui glob compresibil a fost elaborată în detaliu de Lamb [BenS81]. În ref. [HGWL82] au fost analizate două efecte: compresibilitatea continuumului nuclear și distorsiunile mai mari decât cele de tip cuadrupolar ale suprafeței Fermi.³ Concluzia articolului citat mai sus este că ambele efecte conduc la neconcordanțe cu datele experimentale. În concluzie, cea mai bună descriere a rezonanțelor gigant până la energii de aproximativ 15 – 20 MeV este dată de modelul unui glob elastic incompresibil ale cărui frecvențe proprii sunt determinate de distorsiunile cuadrupolare ale sferei Fermi.

O altă observație, esențială pentru lucrarea de față, este aceea că tratarea DFN pentru un nucleu incompresibil exclude, atât în cazul electric cât și în cazul magnetic excitațiile de tip dipolar, adică de multipolaritate $\lambda = 1$. Din (3.40–3.41) și (3.44–3.45) rezultă că atunci când modul dipolar este excitat, vor avea contribuții nenule numai parametrii de masă B_λ (energia cinetică) nu și parametrii de rigiditate C_λ (energia potențială). Acest lucru se întâmplă atunci când forța de revenire elastică este nulă și nucleul se deplasează ca un întreg (în cazul rezonanțelor electrice) sau se rotește ca un întreg (în cazul rezonanțelor magnetice) fără modificarea stării intrinseci a nucleului [BM75]. Deci, în limita lungimilor de undă mari, tratarea fluid dinamică dă moduri pur redundante (nefizice) pentru excitațiile de tip dipolar. Mai jos vom vedea explicit cum se întâmplă acest lucru.

cuantice, enunțate mai devreme, se demonstrează că în formarea excitațiilor izoscalare vibraționale în nuclee sferice, la energii joase și intermediare, iau parte numai o fracțiune din nucleoni, adică cei aflați într-un strat de grosime finită din apropierea suprafeței nucleului, în timp pentru descrierea rezonanțelor gigant izoscalare trebuie luată în considerare mișcarea coerentă a tuturor particulelor din picătura Fermi.

³se ia în calcul inclusiv termenul cu $p=4$ în lanțul de ecuații ale momentelor funcției de distribuție (3.13–3.15)

Conform celor arătate în anexa I.A, ec.(I.A.7) soluțiile ecuației Navier - Stokes - Helmholtz corespunzătoare ambelor oscilații longitudinale (pulsatorii) și transversale (torsiune) ale globului elastic incompresibil sunt date de (2.7)

$$\mathbf{a}_l^\lambda = N_l^\lambda \nabla j_\lambda(k_l r) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (3.48)$$

și de (2.9)

$$\mathbf{a}_t^\lambda = N_t^\lambda \nabla \times \mathbf{r} j_\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (3.49)$$

Comparând (3.27) și (3.28) cu (3.48) și (3.49), observăm că primele două corespund *limitei lungimilor de undă mari* (adică $kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$) ale ultimelor două. În afară de aceasta, așa cum se arată în secțiunea 2, ecuația Navier - Stokes - Helmholtz mai admite încă o soluție independentă, corespunzătoare excitațiilor transversale de paritate normală. Aceste oscilații sunt descrise de câmpul poloidal (2.8)

$$\mathbf{a}_p^\lambda = N_p^\lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} j_\lambda(k_t r) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (3.50)$$

În limita lungimilor de undă mari, câmpul vectorial poloidal (3.50) devine egal cu cel longitudinal (3.48), cu excepția factorului $\lambda + 1$, adică $\mathbf{a}_p = (\lambda + 1)\mathbf{a}_s$. Este clar că în acest caz, pentru a descrie excitațiile de tip 1^- incompresibile și izoscalare, altele decât cele redundante care se manifestă prin translatarea centrului de masă al nucleului, trebuie să renunțăm la aproximația lungimilor de undă mari [BasMiS93].

3.2 Modul dipol toroidal și vârtejul Hill

Pentru argumente mici $x \ll 1$, funcția Bessel sferică are următorul comportament

$$j_\lambda(x) \longrightarrow \frac{x^\lambda}{(2\lambda + 1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\lambda + 3)} + \dots \right) \quad (3.51)$$

Dacă ne mărginim la primul termen din dezvoltarea de mai sus, atunci aproximația lungimilor de undă mari este valabilă și soluția poloidală (3.50) va deveni simultan irotațională și de divergență zero, deoarece vectorul $r^{\lambda-1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^\mu(\theta, \phi)$ ⁴ satisface simultan condiția de a fi longitudinal

$$\nabla \times r^{\lambda-1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^\mu(\theta, \phi) = 0 \quad (3.52)$$

și transversal

$$\nabla \cdot r^{\lambda-1} \mathbf{Y}_{\lambda\lambda-1}^\mu(\theta, \phi) = 0 \quad (3.53)$$

⁴vezi anexa I.A în legătură cu proprietățile funcțiilor armonice sferice vectoriale.

Acest lucru este exprimat cantitativ de ecuația (3.27). În cazul dipolar $\mathbf{a}_p^1 \sim \mathbf{Y}_{10}^0$ și așa cum am discutat în secțiunea precedentă, nucleul este deplasat ca un întreg fără a își modifica starea internă.

Prin urmare, pentru a investiga răspunsul dipolar al unei sfere elastice incompresibile, trebuie să mergem dincolo de limita impusă de aproximația lungimilor de undă mari și să introducem termenii superiori din dezvoltarea în serie (3.51). Atunci, soluția poloidală (3.50) va deveni [BasMiS93]

$$\mathbf{a}_p^1 = N_p^1 \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} \chi^1(\theta, \phi) \quad (3.54)$$

În continuare ne vom baza considerațiile pe analiza microscopică a curgerii fluidului nuclear sub acțiunea unui răspuns dipolar [SDSD83]. Această analiză a fost făcută în cadrul aproximațiilor Hartree-Fock și a Fazelor Întâmplătoare. Operatorul de răspuns luat în această referință este $rY_{1\mu}$, care apoi a fost corectat pentru mișcarea centrului de masă. S-a găsit că unele dintre stările colective sunt însoțite de oscilații de tip transversal. Liniile de curent asociate acestor moduri transversale 1^- prezintă o structură toroidală. Structuri analoge ale liniilor de curent pentru modurile dipolare de tip vortical au fost puse în evidență în calcule macroscopice [Sem81], [BalMik88].

Ne propunem să calculăm distribuția câmpurilor de curenți și energiile în spiritul DFN pe care l-am expus în secțiunea precedentă. Pentru aceasta, urmând prescripția din [Sem81], [Har81] și [SDSD83] vom alege funcția test χ^1 de forma

$$\chi^1(\theta, \phi) = r^3 Y_{10}(\theta, \phi) \quad (3.55)$$

adică partea radială a lui χ^1 este luată ca următorul termen după aproximația lungimilor de undă mari. Pentru a stabili o expresie explicită pentru câmpul de deplasări, corectat astfel încât să luăm în considerare mișcarea centrului de masă, vom introduce expresia lui \mathbf{a}_p^1 dată de (3.54), cu χ^1 dat de (3.55), în condiția de repaos a centrului de masă $R_{c.m.}$.

$$\delta R_{c.m.} = \frac{\int d\mathbf{r} \rho \mathbf{a}_p^1}{\int d\mathbf{r} \rho} = 0 \quad (3.56)$$

Această procedură conduce la următoarea expresie pentru câmpul de deplasări

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p^1 &= N_p^1 \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} r (r^2 - R^2) Y_{10}(\theta, \phi) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} N_p^1 \left[\sqrt{2} r^2 \mathbf{Y}_{12}^0(\theta, \phi) + (5r^2 - 3R^2) \mathbf{Y}_{10}^0(\theta, \phi) \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Figura 3.4: *Liniile de curent corespunzătoare vârtejurii Hill în planul meridional.*

Folosind proprietățile funcțiilor armonice sferice vectoriale, componentele sferice ale câmpului de viteze (3.57) se pot rescrie după cum urmează [BasMiS93]

$$(a_p^1)_r = \sqrt{\frac{3}{\pi}} N_p^1 (r^2 - R^2) \cos \theta \quad (3.58)$$

$$(a_p^1)_\theta = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} N_p^1 (2r^2 - R^2) \sin \theta \quad (3.59)$$

$$(a_p^1)_\phi = 0 \quad (3.60)$$

O dată ajunși la acest punct al expunerii noastre, trebuie să facem sublinierea că am obținut un câmp de deplasări care coincide cu acela pentru vârtejul Hill sferic, cunoscut în Hidrodinamica Teoretică de mai bine de un secol [Lam57], [MT68]. Teoria curgerii vorticiale inelare poloidale este expusă în II.A.3 a capitolului. Așa cum rezultă din formula (II.A.24), funcția de curent Stokes pentru vârtejul Hill este dată de

$$\psi(r, \theta) = N_p^1 (r^2 - R^2) r^2 \sin^2 \theta \quad (3.61)$$

Liniile de contur (curent) ale funcției (3.61) sunt arătate în fig.3.4. Punctele critice sau de stagnare sunt fixate de condițiile $a_r = 0$ și $a_\theta = 0$, și anume $r_c = R/\sqrt{2}$ și $\theta_c = \pm\pi$.

Locul geometric al acestor puncte este reprezentat de un inel aflat în planul ecuatorial al sferei. În jurul acestui inel are loc mișcarea vorticală a fluidului, liniile de curent, rotite în jurul axului acestei sfere generând tori. Astfel de mișcări vorticale sunt denumite în mod uzual în hidrodinamica clasică vârtejuri inelare, spre deosebire de vârtejurile liniare, la care punctele de stagnare se află pe axa de simetrie a sferoidului. Excitația colectivă corespunzătoare vârtejurii Hill a nucleului o vom denumi *modul dipol toroidal* (MDT).

Conform (II.A.5), vorticitatea curgerii asociate MDT este dată de

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u}_p = \dot{\alpha}(t) \nabla \times \mathbf{a}_p^1 \quad (3.62)$$

În planul ecuatorial, adică planul care conține inelul vortical ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\boldsymbol{\zeta} = 5\sqrt{\frac{3}{\pi}} N_p^1 \dot{\alpha}(t) r \mathbf{e}_\phi \quad (3.63)$$

Deci, vorticitatea vârtejurii Hill depinde de coordonata radială.

O dată stabilit câmpul de viteze al curgerii dipol toroidale, suntem în măsură să evaluăm energia modului de excitație corespunzător. Substituind ec.(3.57) în (3.38), (3.39), parametrii de inerție și rigiditate devin

$$B_1 = (N_p^1)^2 M \langle r^4 \rangle \quad , \quad C_1 = (N_p^1)^2 M \langle v^2 \rangle \langle r^2 \rangle \quad (3.64)$$

Energia este dată de

$$E(1_{tor}^-) = \hbar \sqrt{\frac{C_1}{B_1}} = \hbar \sqrt{5 \langle v^2 \rangle \frac{\langle r^2 \rangle}{\langle r^4 \rangle}} \quad (3.65)$$

Pentru globul Fermi elastic de rază $R = r_0 A^{1/3}$ obținem

$$B_1 = \frac{6}{7\pi} (N_p^1)^2 M R^4 \quad , \quad C_1 = \frac{18}{5\pi} (N_p^1)^2 M v_F^2 R^2 \quad (3.66)$$

$$E(1_{tor}^-) = \sqrt{\frac{21}{5}} \hbar \omega_F \approx 2 \hbar \omega \quad (3.67)$$

Prin urmare, modul toroidal dipolar poate fi interpretat ca o rezonanță izoscalară dipolară de tip $2\hbar\omega$ determinată de excitația volumică a vârtejurii Hill sferic. Folosind parametrii pentru distribuția Fermi realistă, obținem

$$E = 93.72 A^{-1/3} \text{MeV} \quad (3.68)$$

adică modul propus, este cel mai probabil localizat între rezonanțele gigant izovectoare și octupolar izoscalară.

Pentru comparație, notăm că spre deosebire de caracterul transversal al excitației toroidal dipolare, modul dipolar de compresiune - *squeezing*, care este o rezonanță de tip $3\hbar\omega$, este determinată de oscilațiile longitudinale ale câmpului de deplasări

$$\mathbf{a}_s^1 = \nabla r^2 \left(r - \frac{4}{5}R \right) Y_{10}$$

Este evident că acest câmp vectorial nu satisface ecuația de incompresibilitate (3.26), adică rezonanța dipolară de squeezing este esențialmente de natură pulsatorie [HGWL82].

3.3 Calculul multipolilor de tranziție pentru modul dipol toroidal.

Pentru a completa analiza despre excitația dipol toroidală, vom prezenta aici calculul multipolilor electromagnetici și a secțiunilor corespunzătoare proceselor de fotoabsorbție și împrăștiere inelastică electron-nucleu. Cunoașterea acestor mărimi este importantă din moment ce factorul de formă (multipolul electromagnetic) poate fi măsurat direct în reacții de împrăștiere inelastică a electronilor [deFW66], [Ub71], [DW75] și [HB83].

În cazul modului dipol toroidal, densitatea de curent asociată tranziției este dată în reprezentarea dinamic fluidă de

$$\mathbf{J}_{tor} = n_e \mathbf{u}_p = n_e \mathbf{a}_p^1(\mathbf{r}) \dot{\alpha}(t) \quad (3.69)$$

unde $n_e = eZ/An_0$ iar $n_0 = 3A/4\pi R^3$ este densitatea de particule; $\dot{\alpha}(t) = \alpha_0 \omega \cos \omega t$ iar α_0 este dată de (3.37)

Vom calcula mai întâi multipolul transversal electric, conform formulei (II.B.28)

$$\hat{T}_{\lambda\mu}^{el}(k) = \frac{i^\lambda}{k} \int d\mathbf{r} \{ \nabla \times (j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu(\theta, \phi)) \} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{tor}(\mathbf{r}, t) \quad (3.70)$$

Această funcție depinde armonic de timp ca urmare a dependenței similare a densității de curent. Vom introduce factorul de formă transversal electric (vezi (II.B.46))

$$|F_\lambda^{el}(k)|^2 = \frac{4\pi}{3} \langle |\hat{T}_{\lambda 0}^{el}(k, t)|^2 \rangle_t \quad (3.71)$$

În scrierea lui (3.71) am considerat axa z în lungul vectorului \mathbf{k} , și în locul medierii pe starea inițială efectuăm medierea temporală, care va afecta numai amplitudinea dependentă de timp a oscilațiilor dipol toroidale.

Figura 3.5: Factorul de formă transversal electric al MDT pentru ^{40}Ca , ^{90}Zr și ^{208}Pb .

Introducând (3.69) în (3.70) și folosind proprietățile de ortonormare ale funcțiilor armonice sferice vectoriale (I.A.22) obținem

$$\hat{T}_{10}^{el}(k) = 2\sqrt{2}n_e N_p^1 \dot{\alpha}(t) R^5 \frac{j_3(kr)}{kr} \quad (3.72)$$

Ținând cont de faptul că media temporală a lui $\dot{\alpha}^2$ este

$$\langle \dot{\alpha}^2 \rangle_t = \frac{2\alpha^2}{T} \int_0^{T/2} \cos^2 \omega t dt = \frac{\alpha_0 \omega^2}{2} \quad (3.73)$$

definiția (3.71) devine

$$|F_1^{el}(k)|^2 = \gamma \left(\frac{j_3(kR)}{kR} \right)^2 \quad (3.74)$$

unde $\gamma = \sqrt{\sqrt{35/6} Z \hbar \omega R / \hbar v_F M}$, sau dacă normăm la c^2 obținem mărimea adimensională

$$\frac{1}{c^2} |F_1^{el}(k)|^2 = \frac{1}{(9\pi)^{1/3}} \sqrt{\frac{35}{6}} \left(\frac{\omega}{kc} j_3(kR) \right)^2 \frac{Z^2}{A^{4/3}} \quad (3.75)$$

În fig.3.5 am reprezentat $|F_1^{el}(k)|^2$ pentru trei nuclee sferice : ^{40}Ca , ^{90}Zr și ^{208}Pb . Acest grafic demonstrează o intensificare a excitației dipol toroidale în nucleele grele în raport

cu nucleele ușoare. Deasemenea, se observă că primul maxim de difracție al factorului de formă este deplasat către transferuri de impuls mici atunci când trecem la nuclee cu Z și A mari.

Un calcul simplu arată că multipolul magnetic (II.B.29)

$$\hat{T}_{10}^{mag}(k) = i \int d\mathbf{r} j_1(kr) \mathbf{Y}_{11}^0 \cdot \mathbf{J}_{tor} = 0 \quad (3.76)$$

Astfel, cunoscând factorul de formă electric (3.74), putem evalua secțiunea de fotoabsorbție integrată pe o rezonanță (II.B.33)

$$\sigma_\gamma(1_{tor}^-) = \int \sigma(\omega) dE_f = (2\pi)^2 \alpha \frac{\hbar}{\omega} |F_1^{el}(k)|^2 = 10^{-3} - 10^{-4} \frac{Z^2}{A} \text{Mev} \cdot \text{fm}^2 \quad (3.77)$$

Se observă că această valoare este cu aproximativ trei-patru ordine de mărime mai mică decât cea pentru rezonanța gigant dipolară (RGD) [EG70b]

$$\int_{RGD} \sigma(\omega) dE_f = 6 \frac{NZ}{Z} \text{MeV} \cdot \text{fm}^2$$

În principiu este dificil de observat secțiunea de fotoabsorbție a MDT, în primul rând datorită micimii valorii sale și în al doilea rând ca urmare a faptului că poziționarea sa energetică este foarte apropiată de cea a RGD, care este puternic excitată în reacții de fotoabsorbție. Mai notăm că (3.77) a fost obținută lucrând cu frecvența de fotopic $\omega = kc$ în expresia factorului de formă (3.75), adică pentru a excita MDT prin fotoabsorbție trebuie să comunicăm un impuls nucleului care să fie egal cu frecvența tranziției respective, abstracte făcând de factorul constant c , viteza luminii.

Discuția de mai sus avută în legătură cu posibilitatea excitării MDT în reacții de fotoabsorbție ne întărește convingerea că trebuie căutată o modalitate prin care să poată fi făcută această excitare variind independent transferul de impuls k de energia de excitare $\hbar\omega$. Așa cum am subliniat în anexa II.B, în procese inelastice (e, e'), un electron cu energie E_i este împrăștiat de un nucleu țintă la unghiul θ și energia finală E_f . Excitația nucleului are loc ca urmare a pierderii de energie $\hbar\omega = E_i - E_f$, astfel încât măsurarea spectrului energetic a electronilor împrăștiați determină spectrul de excitație a nucleului în chestiune. Variind E_i și/sau θ , putem măsura secțiunea de împrăștiere pentru stările excitate ca funcție de transferul de impuls q , unde $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$.

Pentru a calcula secțiunea diferențială corespunzătoare excitării modului dipol toroidal trebuie să calculăm și factorul de formă Coulombian (II.B.19). În virtutea legii de conservare sarcină - curent, $\nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$, și introducând multipolul longitudinal

$$\hat{L}_{\lambda\mu}(q) = \frac{i^\lambda}{q} \int d\mathbf{r} \nabla (j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

$$= \frac{i^{\lambda+1}}{\hat{\lambda}} (\delta_{\lambda'\lambda-1} \sqrt{\lambda} + \delta_{\lambda'\lambda+1} \sqrt{\lambda+1}) \int d\mathbf{r} j_{\lambda'}(qr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \cdot \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.78)$$

$$(3.79)$$

putem stabili o relație între acesta și multipolul Coulombian $\hat{M}_{\lambda\mu}$ (vezi (2.14)):

$$\hat{L}_{\lambda\mu}(q) = -\frac{\omega}{q} \hat{M}_{\lambda\mu}(q) \quad (3.80)$$

dacă presupunem că multipolul Coulombian (de sarcină) are o dependență armonică în timp. Introducând expresia curentului dipolului toroidal (3.69) în (3.79), găsim că multipolul longitudinal, deci și cel Coulombian se anulează la fel ca și multipolul magnetic (3.76).

Deci, în electro-excitarea MDT contribuie numai factorul de formă transversal electric! Că multipolii Coulombieni nu participă în excitație se justifică prin faptul că densitatea de tranziție a sarcinii ρ_1^{fi} (II.B.48) este zero ca urmare a condiției de incompresibilitate impusă globului Fermi. Cu alte cuvinte, ca urmare a faptului că modul excitat este pur rotațional, adică de divergență zero (cf. (3.54)), factorul de formă longitudinal se anulează. Multipolul magnetic se anulează datorită faptului că deși acesta corespunde tot excitării unor mișcări rotatorii, acestea sunt de paritate opusă MDT, care este de paritate normală ca și excitațiile de tip electric.

Aici merită notată diferența față de cazul RGD electrice. Modelul cel mai simplu pentru a studia această excitație nucleară este modelul Goldhaber - Teller. În acest model se presupune că neutronii se mișcă în antifază față de protoni, oscilatoriu, forța de revenire fiind determinată de descreșterea suprapunerii dintre neutroni și protoni. Câmpul de viteze este de tip irotational și atunci se poate arăta ușor că elementul de matrice redus al multipolului Coulombian este proporțional cu cel al multipolului transversal electric [GTBW63], [deFW66] ⁵

$$\langle 1^- \parallel \hat{T}_1^{el} \parallel 0^+ \rangle = -\frac{\omega}{q} \sqrt{2} \langle 1^- \parallel \hat{M}_1 \parallel 0^+ \rangle \quad (3.81)$$

Deci, în secțiunea diferențială de electro - excitație (II.B.34), termenul dipol transversal electric, care depinde de curent va fi micșorat cu un factor $(\omega/q)^2$. Acest factor multiplicativ este prezent pentru orice valoare a lui q , nu numai în limita lungimilor de undă mari. Multipolii transversali sunt importanți când unghiul de împrăștiere $\theta \approx \pi$. În rest factorul de formă longitudinal domină secțiunea diferențială a RGD. Acest fapt poate fi văzut și ca o consecință a caracterului nerotațional al curentului asociat. Totuși, așa cum

⁵vezi deasemenea (2.14) și (2.18).

se arată în [GTBW63], RGD nu satisface regula de sumă *Thomas - Reiche - Kuhn* [EG70b] pentru nuclee ușoare și deasemenea, dependența de transferul de impuls a factorului de formă este inconsistentă cu imaginea simplă a mișcării armonice colective a sarcinii. Prin urmare trebuie considerate și alte mecanisme cum sunt cele asociate undelor de spin colective electrice [Ub66], sau ca să fim în spiritul lucrării care o prezentăm, să includem efectele de retardare, orbitale și de spin, în regula de sumă, adică momentele multipolare toroidale [Dub75].

Conform (II.B.34), secțiunea diferențială pentru MDT va arăta astfel

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{1^-tor} = 4\pi\sigma_{Mott}f_{rec}^{-1} \left(\frac{q_{\mu}^2}{2q^2} + \tan^2\frac{\theta}{2}\right) |\langle 1^- \parallel \hat{T}_1^{el} \parallel 0^+ \rangle|^2 \quad (3.82)$$

Observăm că spre deosebire de cazul fotoabsorbției putem varia secțiunea diferențială (3.82) modificând unghiul θ , dacă păstrăm transferul de energie fixat pentru a produce tranziția $0^+ \rightarrow 1^-_{tor}$.

Dependența lui (3.82) după unghiul de împrăștiere este reprezentată în fig.(3.6). Observăm că partea longitudinală necontribuind la electroexcitarea MDT, nu pare a fi necesar să folosim cazul de retroîmprăștiere. Cu toate acestea, în realitate vor apărea în procesul de excitare și moduri care vor contribui la partea longitudinală și prin urmare pentru a putea elimina influența lor este preferabil să considerăm ca favorabil cazul de împrăștiere la $\theta = 180^\circ$.

O altă caracteristică importantă în studiul oscilațiilor colective în împrăștiere inelastice de electroni pe nuclee este dată de densitatea de curent de tranziție (II.B.40), mărime accesibilă determinării experimentale. În cazul discutat de lucrarea noastră, interesează numai densitatea $\mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}(\mathbf{r})$ care poate fi exprimată ca transformata Fourier inversă a factorului de formă electric transversal (II.B.49) :

$$\mathcal{J}_{12}(r) = -\frac{1}{\sqrt{3\pi^3}} \int_0^\infty F_1^{el}(q) j_2(qr) q^2 dq \quad (3.83)$$

Cum $F_1^{el}(q) \sim \frac{j_3(qR)}{qR}$ vom obține o integrală de tipul

$$\int_0^\infty J_\nu(at) J_{\nu+1}(bt) dt = a^\nu b^{-\nu-1}, \quad 0 < a < b \quad (3.84)$$

$$= \frac{1}{2a}, \quad a = b \quad (3.85)$$

$$= 0, \quad a > b \quad (3.86)$$

unde $\nu = n + 1/2$, cu n - întreg și $J_{\nu+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} j_n(z)$ este funcția Bessel de indice

Figura 3.6: Secțiunea diferențială de retroâmprăștiere pentru ^{40}Ca , ^{90}Zr și ^{208}Pb .

semi-întreg. În sfârșit, densitatea de curent va fi

$$\mathcal{J}_{12}(r) = -\frac{\gamma}{2\sqrt{3\pi}} \frac{r^2}{R^4}, \quad 0 < r < R \quad (3.87)$$

$$= -\frac{\gamma}{4\sqrt{3\pi}} \frac{1}{R^2}, \quad r = R \quad (3.88)$$

$$= 0, \quad r > R \quad (3.89)$$

Această funcție radială este reprezentată grafic în fig.3.7.

De interes în procesele inelastice (e, e') este și vorticitatea $\omega_{\lambda\lambda}$, o mărime care determină proprietățile componentelor curentului nuclear libere de legea de conservare a sarcinii și curentului. Conform formulei (II.B.56)

$$\omega_{11}(r) = \sqrt{3} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \mathcal{J}_{12}(r) \quad (3.90)$$

și deci în interiorul nucleului, densitatea de vorticitate variază liniar cu raza, la fel ca și vectorul vorticitate (3.63)

În cazul MDT, constrângerea enunțată mai sus nu apare deoarece $\nabla \cdot \mathbf{J}_{tor} = 0$, și prin urmare densitățile de tranziție ale rotorului curentului \mathcal{T}_{11} (II.B.53) sunt identice cu cele ale vorticității. Această funcție radială este reprezentată grafic în fig.3.8.

Figura 3.7: Densitatea de curent de tranziție \mathcal{J}_{12} a MDT pentru ^{40}Ca , ^{90}Zr și ^{208}Pb .

În lumina celor arătate mai sus apare ca necesară investigarea structurii factorului de formă electric $F_1^{el}(q)$ care este singura caracteristică electromagnetică activă în răspunsul MDT al nucleelor sferice.

Așa cum am arătat în sețiunea 2, adoptând parametrizarea multipolară Dubovik și Ceșkov, multipolul transversal electric corespunzător MDT va fi pus sub forma ⁶

$$\hat{T}_{10}^{el}(q) = q^2 \hat{T}_{10}^{tor} \quad (3.91)$$

dacă ținem seama de faptul că multipolul Coulombian \hat{Q}_{10} nu participă în această excitație (cf.(2.23) și (3.81)). Termenul din membrul drept al (3.91) este multipolul toroidal (2.26). În limita lungimilor de undă mari ($q \rightarrow 0$) avem cf.(2.27)

$$\hat{T}_{tor}(0) = \frac{1}{3} \mathcal{T}_{10} \quad (3.92)$$

unde \mathcal{T}_{10} este momentul toroidal dipolar de tranziție. Introducând (3.69) în (2.27) și calculând media temporală, obținem următoarea relație de proporționalitate pentru mo-

⁶vezi (2.25)

Figura 3.8: *Vorticitatea de tranziție ω_{11} a MDT pentru ^{40}Ca , ^{90}Zr și ^{208}Pb .*

mentul dipolar toroidal de tranziție

$$\langle \mathcal{T}_1 \rangle_t \sim \alpha Z \quad (3.93)$$

Acest rezultat era cunoscut pentru tranziția $1s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$ a electronului în atomii hidrogenoizi [DT83]. Acesta este motivul pentru care efectele electromagnetice de tip toroidal sunt atât de slabe pentru Z mici. Însă în timp ce la tranziția atomică mai sus menționată, momentul toroidal intervine ca o corecție, la tranziția MDT, ea este principala caracteristică electromagnetică activă în răspunsul nucleului.

Deci așa cum în limita $q \rightarrow 0$ pentru RGD, secțiunea este proporțională cu pătratul r.m.e. al momentului dipolar electric, în cazul MDT ea va fi $\sim |\langle \mathcal{T}_1 \rangle|^2$.

4

Rezonanțele de spin-flip

Investigarea experimentală a modurilor dependente de spin a fost de deosebit succes în ultimii cinsprezece ani, îndeosebi în ceea ce privește excitațiile de natură magnetică 1^+ care au fost detectate în experimente de retroîmprăștiere inelastică (e, e') pe nuclee par-pare [BK87]. Deasemenea, în reacții (p, n) la energii intermediare, a fost obținută o distribuție unghiulară caracterizată de un transfer de moment cinetic $l = 1$ cu o dependență energetică a secțiunii de ciocnire a picului corespunzător, asemănătoare celei observate pentru rezonanța Gamow - Teller, indicând astfel prezența tranzițiilor de tip *spin-flip* [Gaa.et al.81]. Tranzițiile cu aceste caracteristici sunt date de un operator de forma

$$r [Y_1 \otimes \sigma] \tau_3 \quad (4.1)$$

care este de natură electrică.

Pe de altă parte, în procesul de excitare a RGD în cadrul modelului GT, despre care am vorbit în secțiunea precedentă mai pot apărea și alte moduri de vibrație în care protonii cu spinul în sus și neutronii cu spinul în jos se mișcă în antifază față de protoni cu spinul în jos și neutronii cu spinul în sus (modul *spin-izospin*), sau în care nucleoni cu spinul în sus se mișcă în antifază față de nucleoni cu spinul în jos (modul *undă de spin*).

Dacă considerăm excitarea nucleelor cu starea fundamentală 0^+ , atunci teoria supermultipletului a lui Wigner va conduce exact la aceste tipuri de stări [Wig37], care vor fi degenerate dacă forțele nucleare sunt independente de spin, astfel încât momentul orbital L și spinul S sunt decuplați. Clasificarea lui Wigner este următoarea :

1. Stările GT sunt de $L = 1, S = 0$ și deci $J = 1^-, T = 1$;
2. Modul asociat stărilor de spin-izospin (s-is) sunt de $L = 1, S = 1$ adică de moment cinetic total $J = 0^-, 1^-, 2^-, T = 1$;

3. Stările unde de spin (us) sunt $L = 1$, $S = 1$, adică $J = 0^-, 1^-, 2^-$ și $T = 1$

Tipurile 2 și 3 de vibrații colective au fost prima oară prezise în cadrul teoriei materiei nucleare [GHW59].

Predicțiile teoriei supermultipletului au fost confirmate de calcule în modelul particulă-gaură, și anume că pentru nuclee ca ^{12}C , ^{16}O , ^{28}Si , ^{32}S și ^{40}Ca , pe lângă RGD 1^- apar și stările de spin-flip dipolare 1^- și cuadropolare magnetice 2^- în împrăștieri de electroni [Do70], [DoWa70]. Calcule mai recente, efectuate în cadrul Aproximației Fazelor Întâmplătoare se referă la excitarea stărilor de spin-flip în ^{40}Ca și ^{208}Pb [DS84], [DP83], și subliniază faptul că modul 1^- este puternic concentrat în regiunea $1\hbar\omega$. S-a arătat că există două tipuri de corelații pentru 1^- , Y_1 și $[Y_1 \otimes \sigma]_1$, dar competiția lor nu este puternică. Starea colectivă dependentă de spin 1^- este construită din configurații de spin-flip în care corelațiile de tip Y_1 nu au aproape nici un efect. Prin urmare s-au obținut, în afară de RGD standard, stări colective dependente de spin, poziționate din punct de vedere energetic deasupra RGD. Astfel, la ^{40}Ca în afară de starea RGD la 22.6 MeV. s-a obținut o stare slab colectivă, dependentă de spin la 21.86 MeV. La ^{208}Pb , pe lângă starea RGD de 12.57 MeV s-au obținut două stări puternice de spin-flip la 16.18 MeV și 18.82 MeV.

Studiul curenților de magnetizare asociați tranzițiilor care duc la construirea stării de spin-flip 1^- , arată că liniile câmpului vectorial de viteze asociat este foarte asemănător cu câmpul modului izoscalar de natură orbitală MDT.

Mai există calcule în modelul cuasiparticulă care demonstrează existența acestor moduri colective ca urmare a introducerii unor forțe reziduale dependente de spin în Hamiltonian, precum și posibilitatea excitării lor intense prin împrăștieri inelastice de electroni pe nuclee [EGK80], [PVSD84]. Interesant de notat că în aceste ultime referințe modul colectiv 1^- dependent de spin mai este denumit și *transversal*, deoarece contribuția majoră în excitarea acestei stări este dată de factorul de formă transversal electric, așa cum se întâmplă și cu MDT.

În această lucrare fiind interesați de moduri de natură toroidală, ne vom ocupa în continuare de structura electromagnetică detaliată a modurilor de spin-flip, așa cum se relevă în experiențe de împrăștieri inelastice (e, e').

4.1 Modelul Goldhaber - Teller generalizat

Acest model se aplică nucleelor cu $N = Z$, adică cu starea fundamentală $J = 0^+$,

$T = 0$, și presupune că sfera Fermi protonică oscilează ca un întreg în antifază față de sfera Fermi neutronică. Acest model va fi atunci cel al unui oscilator de două particule [GTBW63]

$$H = \frac{1}{2\mu}\mathbf{p}_n^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2\mathbf{q}_n^2 \quad (4.2)$$

unde ω este frecvența oscilației, $\mu = Am/4$ este masa redusă a sistemului, \mathbf{p}_n este impulsul relativ, iar \mathbf{q}_n coordonata relativă, care mai poate fi scrisă în funcție de operatorii sferici de creare și anihilare

$$(q_n)_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} (a_{\lambda\mu}^+ + (-)^{\mu} a_{\lambda-\mu}) \quad (4.3)$$

În continuare presupunem că oscilațiile colective, sunt descrise de către deplasarea rigidă a densității stării fundamentale $\rho_0(\mathbf{r})$ de spin *sus* sau *jos*. Atunci vom putea scrie matricea densitate de tranziție $\phi(\mathbf{r})$ a celor trei moduri prezise de teoria supermultipletului [Ub65]

$$\phi_{GT}(\mathbf{r}) = \frac{1+\tau_3}{2} \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{q}_n) + \frac{1-\tau_3}{2} \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{q}_n) \quad (4.4)$$

$$\phi_{s-is}(\mathbf{r}) = \frac{1+\tau_3\sigma_\nu}{2} \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{q}_n) + \frac{1-\tau_3\sigma_\nu}{2} \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{q}_n) \quad (4.5)$$

$$\phi_{us}(\mathbf{r}) = \frac{1+\sigma_\nu}{2} \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{q}_n) + \frac{1-\sigma_\nu}{2} \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{q}_n) \quad (4.6)$$

unde

$$\int d\mathbf{r}\rho_0(\mathbf{r}) = Z \quad (4.7)$$

Aici $\nu = -1, 0, 1$ arată că modurile colective care implică spinul corespund stărilor triplet ale spinului final S_f (care este decuplat de mișcarea orbitală în modelul oscilatorului armonic). Dezvoltând în serie Taylor și păstrând numai termenii care descriu tranziția $0^+ \rightarrow 1^-$ la stările dipolare ale oscilatorului considerat de model, găsim că

$$\phi_{GT}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4}\tau_3\mathbf{q}_n \cdot \nabla\rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.8)$$

$$\phi_{s-is}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4}\tau_3\sigma_\nu\mathbf{q}_n \cdot \nabla\rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.9)$$

$$\phi_{us}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4}\sigma_\nu\mathbf{q}_n \cdot \nabla\rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.10)$$

Cum densitățile de tranziție locală și de spin, sunt obținute din matricea densitate $\phi(\mathbf{r})$ prin

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\text{Tr} \tau_3\phi(\mathbf{r}) \quad (4.11)$$

$$\mu_{p,n}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_{p,n}}{2}\text{Tr} \boldsymbol{\sigma}\tau_3\phi(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

și folosind ecuațiile (4.8) - (4.10) obținem

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{q}_n \cdot \nabla \rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.13)$$

care își aduce contribuția la modul GT, și densitatea de curent asociată

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_n \rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

Cum densitatea de spin (4.12) mai poate fi scrisă sub forma [RiSc80]

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A \langle f | \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \left\{ g_p \frac{1 + \tau_3^i}{2} + g_n \frac{1 - \tau_3^i}{2} \right\} \boldsymbol{\sigma}^i | i \rangle$$

contribuția modului s-is este dată de

$$(\mu_\nu)_{s-is} = \frac{\hbar}{4mc} \frac{g_p - g_n}{2} \delta_{\nu\nu'} \mathbf{q}_n \cdot \nabla \rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

Termenul

$$(\mu_\nu)_{us} = \frac{\hbar}{4mc} \frac{g_p + g_n}{2} \delta_{\nu\nu'} \mathbf{q}_n \cdot \nabla \rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.16)$$

care contribuie la starea de undă de spin cu $T = 0$, poate fi neglijat datorită micimii factorului $[(g_p + g_n)/(g_p - g_n)]^2$, unde $g_p = 5.586$, $g_n = -3.3826$.

În continuare stabilim expresiile multipolilor electromagnetici care corespund acestor vibrații colective. Pentru aceasta vom exprima multipolul transvesal electric ca o sumă a două contribuții : una orbitală și alta de spin (magnetizare)

$$\hat{T}_{\lambda\mu}^{el}(q) = \hat{T}_{\lambda\mu}^{orb}(q) + \hat{T}_{\lambda\mu}^{spin}(q) \quad (4.17)$$

unde

$$\hat{T}_{\lambda\mu}^{orb}(q) = \frac{i^\lambda}{q} \int d\mathbf{r} \{ \nabla \times (j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu(\theta, \phi)) \} \cdot \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (4.18)$$

$$\hat{T}_{\lambda\mu}^{spin} = i^\lambda q \int d\mathbf{r} j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu(\theta, \phi) \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) \quad (4.19)$$

Atunci elementele de matrice

$$\langle 1^- M_f | \hat{M}_{\lambda\mu} | 0^+ \rangle = \frac{qF(q)}{4\pi} \left(\frac{2\pi\hbar}{3Am\omega} \right)^{1/2} \delta_{\lambda 1} \delta_{\mu M_f} \quad (4.20)$$

$$\langle 1^- M_f | \hat{T}_{\lambda\mu}^{orb} | 0^+ \rangle = -\frac{\omega F(q)}{4\pi} \left(\frac{4\pi\hbar}{3Am\omega} \right)^{1/2} \delta_{\lambda 1} \delta_{\mu M_f} \quad (4.21)$$

vor descrie tranzițiile care conduc la starea $GT\ 1^-$. Este ușor de observat că elementele de matrice reduse corespunzătoare (4.20) și (4.21) satisfac (3.81), i.e. multipolii Coulombian și transversali electrici sunt proporționali în toate ordinele lui q .

Pentru stările s-is

$$\langle 1^- M_f | \hat{M}_{\lambda\mu} | 0^+ \rangle = 0 \quad (4.22)$$

$$\langle 1^- M_f | \hat{T}_{\lambda\mu}^{spin} | 0^+ \rangle = -\frac{q^2 \hbar}{2mc} \frac{g_p - g_n}{2} \frac{F(q)}{4\pi} \left(\frac{2\pi \hbar}{3Am\omega} \right)^{1/2} \delta_{\lambda 1} \delta_{\mu M_f} \quad (4.23)$$

Deci multipolul Coulombian nu participă în excitarea stării s-is. Prin urmare dacă am fi adoptat parametrizarea Dubovik și Ceșkov în loc de separarea (4.17) am fi observat că $\hat{T}_{\lambda\mu}^{spin}$ intră în componența multipolului toroidal $\hat{T}_{\lambda\mu}^{tor}$ împreună cu partea de retardare a lui $\hat{T}_{\lambda\mu}^{orb}$. Cum însă efectele orbitale sunt suprimate complet în excitarea modului s-is, urmează că în electroexcitarea acestuia este activă numai partea de spin a multipolului toroidal, adică, ca să folosim denumirea dată de Blatt și Weisskopf [BW52], momentele electrice induse și corecțiile lor de retardare [FF84], [FH85]

$$\hat{M}'_{\lambda\mu}(q) = \frac{(iq)^{\lambda+1}}{(2\lambda+1)!!} \frac{2}{\lambda+2} \int d\mathbf{r} \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) g_{\lambda}(qr) \quad (4.24)$$

unde

$$g_{\lambda}(z) = 1 - \frac{(\lambda+2)z^2}{2(\lambda+4)(2\lambda+3)} + \dots$$

Primul care a făcut observația că doar multipolii toroidali depind de curentul de magnetizare (inducție) în $\hat{T}_{\lambda\mu}^{el}$ și că aceștia sunt neglijați în *teorema lui Siegert* a fost Dubovik [Dub75]. În limita lungimilor de undă mari, (4.24) va fi proporțional cu momentul toroidal de tranziție dependent de spin

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+1)} \int d\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\mu}) \nabla (r^{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)) \quad (4.25)$$

Deci, în timp ce tranziția GT este de natură electromagnetică preponderent Coulombiană datorită factorului $(\omega/q)^2$ care pondererează multipolul $\hat{T}_{\lambda\mu}^{el}$, rezonanța s-is este de natură pur transversal electrică, sau pentru a fi în spiritul lucrării de față, pur toroidală.

Considerațiile de mai sus ne vor conduce la niște expresii extrem de simple pentru secțiunile diferențiale corespunzătoare procesului inelastic (e, e')

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{1^- GT} = \sigma_{Mott} b^2 \frac{F^2(q)}{2A} \left[q^2 V_L(\theta) + 2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 V_T(\theta) \right] \quad (4.26)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{1^- s-is} = \sigma_{Mott} b^2 \frac{F^2(q)}{2A} \left(\frac{q^2 \hbar c}{2mc^2} \right) \left(\frac{g_p - g_n}{2} \right)^2 V_T(\theta) \quad (4.27)$$

Figura 4.1: Secțiunile diferențiale $(d\sigma/d\Omega)_{GT}$ și $(d\sigma/d\Omega)_{s-is}$ ale nucleelor ^{12}C și ^{16}O pentru unghiurile de împrăștiere ale electronilor $\theta = 10^\circ$ (stânga) și $\theta = 180^\circ$ (dreapta).

unde $b = \sqrt{m\omega/\hbar}$ este lungimea oscilatorului armonic de de frecvență ω , iar factorul de formă al densității de sarcină în starea fundamentală este

$$F(q) = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho_0(\mathbf{r}) \quad (4.28)$$

Se observă că (4.27) are aceeași structură ca și (3.82), adică numai partea transversală contribuie la secțiunea diferențială a electroexcitării modului 1^- . În fig.(4.1) am reprezentat grafic secțiunile diferențiale a celor două rezonanțe , GT și s-is, corespunzătoare electroexcitării nucleelor ^{12}C , ^{16}O iar în fig.(4.2) pentru ^{40}Zr și ^{208}Pb la unghiuri de împrăștiere $\theta = 10^\circ$ și 180° .

Din studiul acestor grafice se desprinde o concluzie pe care am subliniat-o și în 3.3

Figura 4.2: Secțiunile diferențiale $(d\sigma/d\Omega)_{GT}$ și $(d\sigma/d\Omega)_{s-is}$ ale nucleelor ^{40}Ca și ^{208}Pb pentru unghiurile de împrăștiere ale electronilor $\theta = 10^0$ (stânga) și $\theta = 180^0$ (dreapta).

pentru MDT, și anume că pentru unghiuri de împrăștiere mici, secțiunile diferențiale ale rezonanțelor GT sunt cu mult mai mari decât cele ale rezonanțelor de s-is chiar și la transferuri de impuls mari. În schimb pentru unghiuri de retroîmprăștiere secțiunile diferențiale ale modurilor de s-is devin importante și depășesc în valoare absolută pe cele ale rezonanțelor GT la transferuri de impuls de aproximativ $q > 0.5\text{fm}^{-1}$ pe întreg cuprinsul tabelului Mendeleev.

Prin urmare, studiul vibrațiilor toroidale dependente de spin prin împrăștiere inelastice de electroni este preferabil de a fi făcut la unghiuri de 180^0 și transferuri de impuls mari.

Anexa II.A

Vorticitatea hidrodinamică

Ecuatia de mișcare pentru un fluid inviscid care la momentul t ocupă un spațiu mărginit de suprafața închisă S și este supus unei forțe externe \mathbf{F} este [LL88]

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (\text{II.A.1})$$

unde p este presiunea normală exercitată pe suprafața S .

În cazul în care forțele derivă dintr-un potențial ϕ , vom scrie că $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. Dacă de asemenea presiunea este o funcție de densitate astfel încât $\int dp/\rho$ există, atunci

$$\frac{1}{\rho}(d\mathbf{r}\nabla)p = \frac{dp}{\rho} = d \int \frac{dp}{\rho} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \int \frac{dp}{\rho} \quad (\text{II.A.2})$$

și cum $d\mathbf{r}$ este ales arbitrar

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho} \quad (\text{II.A.3})$$

Atunci ecuația de mișcare (II.A.3) se va pune sub forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \left(\int \frac{1}{\rho}\nabla p + \phi \right) \quad (\text{II.A.4})$$

Mai departe, observând că vorticitatea are expresia

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (\text{II.A.5})$$

și folosind formula derivatei materiale, ecuația (II.A.4) se poate pune sub forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} = -\nabla \chi \quad , \quad \chi = \int \frac{dp}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2} \quad (\text{II.A.6})$$

ecuație care pune în evidență vorticitatea.

Curgerile Beltrami apar atunci când $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} = 0$; ecuația de mișcare corespunzătoare lui (II.A.6) este

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \chi \quad (\text{II.A.7})$$

Dacă vorticitatea este nenulă, condiția $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} = 0$ implică că liniile de curent coincid. Dacă $\boldsymbol{\zeta} = 0$ avem cazul important al *mișcării irotaționale* despre care am amintit în cursul lucrării și care este o curgere de tip Beltrami.

Dacă \mathbf{a} este accelerația avem

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} + \nabla \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$$

și aplicând rotorul obținem

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} - (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{II.A.8})$$

folosind ecuația continuității $\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = -d\rho/dt$. Dacă forțele sunt conservative și presiunea este o funcție de densitate, atunci, aplicând rotorul lui (II.A.7) avem că $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ și atunci (II.A.8) devine

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ \rho \end{pmatrix} \cdot \nabla \right] \mathbf{u} \quad (\text{II.A.9})$$

În mișcările bidimensionale, la care ne vom restrânge în continuare, vectorul vorticitate este în mod necesar perpendicular pe planul de mișcare și prin urmare produsul vectorial $\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u}$ reprezintă un vector care se află în planul mișcării, perpendicular pe \mathbf{u} , astfel încât rotația de la \mathbf{u} la $\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u}$ să fie în sens trigonometric.

Din (II.A.9) rezultă că rata de modificare a vorticității este

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{II.A.10})$$

II.A.1 Funcția de curent

Fluxul într-un fluid depinde numai de poziție și timp. Dacă notăm fluxul prin ψ , atunci în coordonate carteziane

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

Funcția ψ se mai numește funcție de curent. Existența acestei funcții este o consecință simplă a ipotezei de continuitate și incompresibilitate a fluidului.

Dacă luăm două puncte P_1, P_2 în fluid și ψ_1, ψ_2 valorile corespunzătoare ale funcției de curent, atunci, din condiția de conservare a fluxului (continuitate), fluxul prin AP_2

este egal cu fluxul prin AP_1 + fluxul prin P_1P_2 . Deci fluxul prin P_1P_2 este $\psi_2 - \psi_1$. Mai mult decât atât, dacă P_1 și P_2 se află pe aceeași linie de curent, fluxul prin P_1P_2 este egal cu fluxul prin linia de curent care trece prin punctele P_1 și P_2 . Deci $\psi_1 - \psi_2 = 0$, și funcția de curent este constantă de-a lungul unei linii de curent.

Fie $P_1P_2 = \delta s$ un arc infinitesimal al unei curbe. Viteza fluidului care trece prin acest arc poate fi descompusă într-o componentă paralelă și una perpendiculară pe δs . Componenta paralelă nu va contribui la flux. Componenta perpendiculară va fi

$$v_{\perp} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} (\psi_2 - \psi_1) / \delta s = \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

unde ψ_1 și ψ_2 sunt valorile funcției de curent în P_1 și P_2 . În coordonate carteziene, considerând creșterile infinitesimale δx , δy , componentele u_x , u_y ale vitezei sunt date de

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

iar în coordonate polare

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

pentru componentele radială și tangențială.

Considerăm acum \mathbf{s}_1 un vector unitate, tangent la linia de curent $\psi = \text{constant}$, în direcția vitezei \mathbf{u} . Fie \mathbf{n} vectorul unitate în direcția normalei la linia de curent, iar \mathbf{k} un vector unitate perpendicular pe planul de mișcare de așa manieră ca \mathbf{k} , \mathbf{s}_1 și \mathbf{n} să formeze un triedru. Atunci $\mathbf{u} = u\mathbf{s}_1$ și folosind definiția dată mai sus funcției de curent avem

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial n} = -(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)$$

Cum \mathbf{n} și $-\nabla \psi$ sunt paraleli iar \mathbf{n} este un vector unitate, modulul vitezei este același cu a lui $-\nabla \psi$. În consecință, pentru a obține viteza, trebuie să rotim acest vector printr-un unghi drept, de la \mathbf{n} la \mathbf{s}_1

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k} \times (-\nabla \psi) = \mathbf{k} \times \nabla \psi \quad (\text{II.A.11})$$

Vorticitatea va fi

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{k}(\nabla \cdot (\nabla \psi)) - (\mathbf{k} \cdot \nabla) \nabla \psi$$

Al doilea termen reprezintă o variație în lungul lui \mathbf{k} și este deci zero, din moment ce mișcarea este bidimensională. Atunci

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{k} \nabla^2 \psi \quad (\text{II.A.12})$$

și

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} = (\nabla\psi)(\nabla^2\psi) \quad (\text{II.A.13})$$

În sfârșit, considerând operatorul $\mathbf{u}\nabla$ și folosind produsul scalar triplu, obținem

$$\mathbf{u}\nabla = \mathbf{k}(\nabla\psi \times \nabla) \quad (\text{II.A.14})$$

Rezultă din (II.A.9) că dacă ζ este modulul vorticității, atunci

$$\zeta = \nabla^2\psi \quad (\text{II.A.15})$$

Folosind (II.A.10), (II.A.12), (II.A.14) obținem că

$$\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + (\nabla\psi) \times \nabla(\nabla^2\psi) = 0$$

este ecuația diferențială satisfăcută de ψ .

II.A.2 Potențialul de viteze al unui lichid

În mișcarea irotatățională, $\mathbf{u} = -\nabla\psi$. Folosind expresia componentelor vitezei după derivatele funcției de curent, avem

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (\text{II.A.16})$$

sau, în notații vectoriale

$$-\nabla\phi = \mathbf{k} \times \nabla\psi \quad (\text{II.A.17})$$

Din examinarea ecuației (II.A.11) tragem concluzia că $\nabla\phi$ și $\nabla\psi$ sunt perpendiculari, adică curbele, $\phi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ se intersectează la unghiuri drepte.

Următoarele puncte trebuie subliniate :

- Funcția de curent ψ există indiferent dacă mișcarea este irotatățională sau nu.
- Potențialul de viteze poate exista numai dacă mișcarea este irotatățională.
- Atunci când fluidul se mișcă, partea irotatățională a acestuia poate ocupa diferite regiuni în spațiu. Existența potențialului vitezelor este o proprietate a acelor părți ale fluidului care se mișcă irotatățional și nu a regiunilor din spațiu, temporar ocupate de acesta.

Să considerăm funcția de curent

$$\psi = xy$$

Găsim că $\nabla^2\psi = 0$ și mișcarea este irotațională. Folosind (II.A.6) și integrând obținem potențialul de viteze corespunzător

$$\phi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Liniile de curent satisfac $xy = \text{const.}$, adică sunt hiperbole dreptunghiulare având axele de coordonate ca asimptote. Liniile de potențial de viteze constant sunt de asemenea hiperbole dreptunghiulare. O astfel de curgere se întâlnește în cazul modurilor cuadrupolare electrice izoscalare.

II.A.3 Vârtejul Hill

Aplicând rotorul ecuației (II.A.6) avem

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \zeta) = 0 \quad (\text{II.A.18})$$

În cazul unei mișcări axial simetrice, cu axa z de simetrie

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y, \quad \zeta = \zeta \mathbf{e}_y$$

unde \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y și \mathbf{e}_z sunt vectorii unitate în planul meridional și perpendiculari pe acest plan. Atunci

$$-\nabla \times \nabla \times \zeta = \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial(u_x \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y \zeta)}{\partial y} \right)$$

și (II.A.18) devine

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(u_x \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y \zeta)}{\partial y} = 0$$

Folosind ecuația continuității

$$\frac{\partial(u_x x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y y)}{\partial y} = 0$$

găsim că

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + y \left\{ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\zeta}{y} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\zeta}{y} \right) \right\} = 0$$

sau, exprimată după funcția de curent

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\zeta}{y} \right) - \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\zeta}{y} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\zeta}{y} \right) = 0 \quad (\text{II.A.19})$$

Când mișcarea este staționară, ecuația (II.A.13) arată că ζ/y este o funcție de ψ , adică

$$\zeta = yf(\psi) \quad (\text{II.A.20})$$

În continuare

$$\zeta = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{y} E^2 \psi \quad (\text{II.A.21})$$

unde

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}$$

Deci, ecuația satisfăcută de funcția de curent este

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E^2 \psi) + y \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y^2} E^2 \psi) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y^2} E^2 \psi) \end{array} \right| = 0 \quad (\text{II.A.22})$$

Când mișcarea este staționară, (II.A.21) și (II.A.22) conduc la ecuația

$$E^2 \psi = y^2 f(\psi) \quad (\text{II.A.23})$$

Exprimând valoarea lui ζ în coordonate polare, obținem

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = r^2 \sin \theta f(\psi)$$

Presupunând în continuare $f(\psi) = A$, putem alege soluții de tipul

$$\psi = \left(\frac{B}{r} + Cr^2 + \frac{A}{10} r^4 \right) \sin^2 \theta$$

Funcția de curent astfel obținută va reprezenta mișcarea în interiorul unei sfere fixe de rază R , în cazul în care ψ este finit în toate punctele sferei, iar componenta normală a vitezei se anulează pe frontieră. Aceste condiții dau $B = 0$, și

$$-\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{r=R} = -\left(C + \frac{AR^2}{10} \right) 2 \cos \theta = 0,$$

și $C = -AR^2/10$. Atunci

$$\psi = -\frac{A}{10} (R^2 - r^2) r^2 \sin^2 \theta, \quad r < R \quad (\text{II.A.24})$$

satisface condițiile impuse mai sus, pentru A arbitrar.

Vorticitatea, dată de calculul direct al ecuației (II.A.20) dă

$$\zeta = Ar \sin \theta$$

Liniile de vârtej sunt cercuri perpendiculare pe axa de simetrie. Pe toate aceste cercuri de raze identice, vorticitatea are aceleași valori.

Există și puncte de stagnare, în planul meridional, date de soluțiile simultane ale ecuațiilor $u_r = 0$, $u_\theta = 0$, adică

$$2(R^2 - 2r^2) \sin \theta = 0 \quad , \quad 2(R^2 - r^2) \cos \theta = 0$$

și atunci $\theta = \pm\pi/2$, $r = R/\sqrt{2}$. Deci, există un inel de puncte de stagnare de rază $r = R/\sqrt{2}$.

Suprafețele de curent sunt date de

$$(R^2 - r^2)r^2 \sin^2 \theta = c^4$$

unde c este o constantă. Acestea includ sfera și axa de simetrie pe care liniile de curent se divid. Principiul divizării liniilor de curent ne permite să desenăm forma liniilor de curent în planul meridional ca în fig.3.4.

Anexa II.B

Împrăștierea de electroni și fotoni pe nucleu

II.B.1 Împrăștierea nerelativistă a unui electron

Să presupunem cazul împrăștierei unui electron nerelativist de sarcină e_p pe un nucleu. Interacția are loc prin intermediul potențialului Coulomb produs de nucleu. ¹

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho_N(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{II.B.1})$$

Vom calcula secțiunea de ciocnire în ipoteza cea mai generală, când se consideră că potențialul de împrăștiere (II.B.1) ca fiind o perturbație. Acest lucru este posibil atunci când este satisfăcută una din cele două condiții de mai jos [LL89]

$$|V| \ll \frac{\hbar}{ma^2} \quad (\text{II.B.2})$$

sau

$$|V| \ll \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2} ka \quad (\text{II.B.3})$$

unde a - raza de acțiune a potențialului $V(\mathbf{r})$. Prin satisfacerea primei condiții vom considera o aproximație care este valabilă pentru orice viteză v .

Ecuatia Schrödinger neperturbată corespunde mișcării libere a electronului

$$(\Delta + k^2)\Psi^{(0)} = 0 \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} \quad (\text{II.B.4})$$

¹ e^2 provine din expresia densității de sarcină în nucleu ρ_N

și are ca soluții unde plane $\Psi^{(0)} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Ecuația pentru prima corecție $\Psi^{(1)}$ la funcția $\Psi^{(0)}$ arată astfel

$$(\Delta + k^2)\Psi^{(1)} = \frac{2\mu V}{\hbar^2}\Psi^{(0)} \quad (\text{II.B.5})$$

Soluția acestei ecuații, așa cum se știe din electrodinamică [MF52], [NY81], poate fi scrisă sub forma

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \Psi^{(0)}(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \quad (\text{II.B.6})$$

Vom alege centrul de împrăștiere ca origine a coordonatelor, introducem vectorul de rază \mathbf{R}_0 în punctul în care evaluăm pe $\Psi^{(1)}$ și notăm prin \mathbf{n}' vectorul unitate în direcția lui \mathbf{R}_0 . Atunci raza vectorială a elementului de volum $d\mathbf{r}'$ este \mathbf{r}' , astfel încât $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}'$. La distanțe mari de centrul de împrăștiere ($R_0 \gg r'$)

$$r = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}'| \approx R_0 - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}'$$

Substituind această relație în (II.B.6) obținem următoarea formulă asimptotică pentru $\Psi^{(1)}$

$$\Psi^{(1)} \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} \quad (\text{II.B.7})$$

unde $\mathbf{k}' = k\mathbf{n}'$ este vectorul de undă al electronului după împrăștiere. Comparând (II.B.7) cu definiția amplitudinii de împrăștiere f la distanțe mari de raza de acțiune a potențialului [LL89]

$$\Psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

obținem formula amplitudinii de împrăștiere în prima aproximație Born

$$f_{B.A.}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{2\mu}{4\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \quad (\text{II.B.8})$$

unde $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ este transferul de impuls, a cărui modul pentru împrăștiere elastică este dat de $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$. Pentru o distribuție de sarcină sferic simetrică în interiorul nucleului, transformata Fourier a potențialului (II.B.1) dă ²

$$\int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{\rho_N(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{q^2} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \rho_N(y) = \frac{4\pi}{q^2} F(q^2) \quad (\text{II.B.9})$$

unde $F(q^2)$ este *factorul de formă*.

Probabilitatea de împrăștiere a electronului pe unitatea de timp și pe elementul de suprafață $ds = r^2 d\Omega$ ($d\Omega$ - elementul de unghi solid) este $vr^{-2}|f|^2 ds = v|f|^2 d\Omega$. Raportând probabilitatea de împrăștiere la fluxul incident, obținem *secțiunea efectivă* a

²Folosind $\int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{-\lambda r}}{r} = \frac{4\pi}{q^2}$ când $\lambda \rightarrow 0$

împrăștierii în unghiul solid $d\Omega$

$$d\sigma = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 d\Omega \quad (\text{II.B.10})$$

Secțiunea de ciocnire diferențială va fi atunci

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{B.A.}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \sigma_{Rutherford} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (\text{II.B.11})$$

unde

$$\sigma_{Rutherford} = \frac{(\hbar c \alpha)^2}{16 E_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

este binecunoscuta secțiune de împrăștiere pe o sarcină punctuală, $E_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ este energia electronului incident, μ - masa redusă, iar $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \approx 1/137.03$ este constanta de structură fină. Măsurarea experimentală a acestei secțiuni de împrăștiere va determina în mod evident transformata Fourier a densității de sarcină

$$F(q^2) = \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \rho_N(y) = \int d\mathbf{y} \frac{\sin qy}{qy} \rho_N(y) \quad (\text{II.B.12})$$

De notat că $F(0) = Z$ este sarcina totală a nucleului.

Să presupunem acum că dorim să extindem analiza noastră, astfel încât să luăm în considerare dinamica cuantică internă a țintei nucleare. Atunci densitatea de sarcină a nucleului va deveni un operator în spațiul Hilbert nuclear, care în prima cuantificare, pentru o familie de nucleoni lipsiți de structură internă se poate reprezenta sub forma

$$\hat{\rho}_N(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^Z \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (\text{II.B.13})$$

Vom considera că transferul de impuls \mathbf{q} este orientat de-alungul axei z și vom dezvolta în unde parțiale [Mes63]

$$e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\lambda+1)} i^\lambda j_\lambda(qr) Y_{\lambda 0} \quad (\text{II.B.14})$$

și aceasta va da

$$\hat{F}(\mathbf{q}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\lambda+1)} \hat{M}_{\lambda 0}(q)$$

$$\hat{M}_{\lambda\mu}(q) = i^\lambda \int d\mathbf{r} j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \hat{\rho}_N(\mathbf{r}) \quad (\text{II.B.15})$$

Cantitățile $\hat{M}_{\lambda\mu}(q)$ sunt Operatori Tensoriali Ireductibili (OTI) în spațiul Hilbert nuclear. Acest lucru se demonstrează dacă se face observația simplă că densitatea se comportă ca un scalar la rotații [Ro57]. Introducând (II.B.13) în (II.B.15) avem

$$\hat{M}_{\lambda\mu}(q) = i^\lambda \sum_{j=1}^Z j_\lambda(qr_j) Y_{\lambda\mu}(\theta_j, \phi_j) \hat{\rho}_N(\mathbf{r}) \quad (\text{II.B.16})$$

Marele avantaj de a identifica OTI , este acela că putem folosi teoria generală a momentului cinetic [VMH75]. În particular teorema Wigner - Eckardt [Edm60] afirmă că elementul de matrice al unui OTI luat între stări nucleare de moment cinetic bun este

$$\langle I_f M_f | \hat{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle = (-1)^{I_f - M_f} \begin{pmatrix} I_f & \lambda & I_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle I_f \parallel \hat{M}_\lambda \parallel I_i \rangle \quad (\text{II.B.17})$$

Acest rezultat are două trăsături foarte utile : în primul rând dă dependența explicită după orientarea nucleară (M -urile), și în al doilea rând conține regulile de selecție pentru momentul cinetic, adică regula triunghiului $\Delta(I_i \lambda I_f)$. Medierea pe stările inițiale și sumarea pe stările finale $\overline{\sum}_i \sum_f$, pentru o tranziție nucleară pe o stare discretă, se va face imediat folosind proprietățile simbolilor $3j$

$$\frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \begin{pmatrix} I_f & \lambda & I_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_f & \lambda' & I_i \\ -M_f & \mu' & M_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2I_i + 1} \frac{1}{2\lambda + 1} \delta_{I_i I_f} \delta_{M_i M_f} \quad (\text{II.B.18})$$

Prin urmare, informația de interes pentru fizica nucleară este conținută în expresia următoare

$$\overline{\sum}_i \sum_f |\langle I_f M_f | F(\mathbf{q}) | I_i M_i \rangle|^2 = \frac{4\pi}{2I_i + 1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |\langle I_f \parallel \hat{M}_\lambda \parallel I_i \rangle|^2 \quad (\text{II.B.19})$$

II.B.2 Electroni relativști

Secțiunea diferențială pentru împrăștierea electronilor relativști cu masă de repaos nulă pe un potențial Coulombian, pot fi obținute din cele nerelativiste efectuând următoarele modificări :

1. Înlocuim în elementul de matrice al tranziției $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ prin $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} u^+(\mathbf{k}') u(\mathbf{k})$, astfel încât să fie incluși și spinorii Dirac pentru electron. ³

³Folosim

$$\frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} |\bar{u}(\mathbf{k}') \gamma_4 u(\mathbf{k})|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4kk'} \text{Tr} \gamma_4 (-i\gamma_\mu k_\mu) \gamma_4 (-i\gamma_\mu k'_\mu)$$

2. Înlocuim pe μc^2 în numărătorul amplitudinii de împrăștiere prin energia totală a electronului în starea finală $\hbar k'c$; acest factor provine de la fluxul incident corespunzător și densitatea finală de stări în Regula de Aur a lui Fermi [EG70b]
3. Introducem transferul de cvadriimpuls $q_\mu^2 = \mathbf{q}^2 - q_0^2$, unde $q_0 = k - k'$, în expresia secțiunii de ciocnire punctuală. Această cantitate satisface

$$q_\mu^2 = 4kk' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{II.B.20})$$

pentru tranziții elastice și inelastice.

Secțiunea diferențială rezultantă va avea atunci forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \frac{q_\mu^4}{\mathbf{q}^4} \frac{4\pi}{2I_i + 1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |\langle I_f \parallel \hat{M}_\lambda \parallel I_i \rangle|^2 \quad (\text{II.B.21})$$

unde

$$\sigma_{Mott} \equiv \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{4\alpha^2 k'^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{q_\mu^4} \quad (\text{II.B.22})$$

este secțiunea Mott pentru împrăștierea unui electron Dirac pe o sarcină punctuală, fixă.

II.B.3 Fotoexcitare și dezintegrare gamma

Considerăm o tranziție nucleară $|I_i M_i\rangle \rightarrow |I_f M_f\rangle$ însoțită de emisia unui foton. Hamiltonianul asociat procesului electromagnetic este [EG70b], [IZ80], [Mes64]

$$H' = -\frac{e_p}{c} \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{J}}_N \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mu=1,2} \left(\frac{\hbar c^2}{2\omega_k \Omega} \right)^{1/2} (a_{\mathbf{k}\mu} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \text{h.c.}) \quad (\text{II.B.23})$$

Aici \mathbf{A} este potențialul vector pentru câmpul de radiație cuantificat, iar Hamiltonianul este scris în reprezentarea Schrödinger. În această expresie $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_{1,2}}$ sunt un set de vectori unitate, orogonali pe \mathbf{k} , $\omega_k = kc$, $a^+(a)$ sunt operatori de creare (anihilare) fononici, iar condițiile de frontieră sunt cele pentru o cutie de volum Ω .

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2kk'}(2k_A k'_A - k_\mu k'_\mu) \\ &= \frac{1}{2kk'}(\mathbf{k}\mathbf{k}' + kk') = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) \end{aligned}$$

Este convenabil să efectuăm o transformare canonică la stări fotonice cu polarizare circulară. Această transformare ne va conduce la o expresie a potențialului vector, în care efectuăm înlocuirea $\sum_{\mu=1,2} \rightarrow \sum_{\mu=\pm 1}$ cu $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\pm 1} \equiv (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1} \pm i\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2})/\sqrt{2}$. Elementul de matrice pentru fotoemisie va lua atunci forma

$$H'_{fi} = -\frac{e_p}{c} \left(\frac{\hbar c^2}{2\omega_k \Omega} \right)^{1/2} \langle f | \int d\mathbf{r} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu}^+ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r}) | i \rangle \quad (\text{II.B.24})$$

Introducem în continuare următoarea dezvoltare pentru undele plane \times vectorul unitate [BW52], [Edm60]

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\mu} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{i}{q} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\lambda+1)} i^\lambda \nabla [j_\lambda(qr) Y_{\lambda 0}(\theta, \phi)], \quad (\text{II.B.25})$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{2\pi(2\lambda+1)} i^\lambda \left[\lambda j_\lambda(qr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu - \frac{1}{q} \nabla \times (j_\lambda(qr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu) \right] \quad (\text{II.B.26})$$

ecuația (II.B.26) fiind valabilă pentru $\mu = 0$ iar (II.B.26) atunci când $\mu = \pm 1$. Marele avantaj al acestor ecuații constă în faptul că ne permite să efectuăm încă o dezvoltare a tranziției nucleare după OTI. Înlăturând varianta cu $\mu = 0$ care nu apare pentru câmpul fonic avem

$$\int d\mathbf{r} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_N = -\sum_{\lambda \geq 1} \sqrt{2\pi(2\lambda+1)} [\hat{T}_{\lambda-\mu}^{el}(k) + \lambda \hat{T}_{\lambda-\mu}^{mag}(k)] \quad (\text{II.B.27})$$

Operatorii multipolari electric și magnetic se definesc după cum urmează

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\lambda\mu}^{el}(k) &= \frac{i^\lambda}{k} \int d\mathbf{r} \{ \nabla \times (j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu) \} \cdot \hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r}) \\ &= \frac{i^{\lambda+1}}{\lambda} (\delta_{\lambda'\lambda-1} \sqrt{\lambda+1} - \delta_{\lambda'\lambda+1} \sqrt{\lambda}) \int d\mathbf{r} j_{\lambda'}(qr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu \cdot \hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{II.B.28})$$

$$\hat{T}_{\lambda\mu}^{mag}(k) = i^\lambda \int d\mathbf{r} j_\lambda(kr) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda}^\mu \cdot \hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r}) \quad (\text{II.B.29})$$

Rata de dezintegrare Fermi va rezulta din Regula de Aur Fermi

$$d\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f + \hbar\omega_k - E_i) \frac{\Omega d\mathbf{k}}{(2\pi^3)} \quad (\text{II.B.30})$$

Cum multipolii electrici au paritate $\pi = (-)^\lambda$, iar cei magnetici $\pi = (-)^{\lambda+1}$, condiția de stări de paritate bună implică

$$|\langle I_f \| \hat{T}_\lambda^{el} + \hat{T}_\lambda^{mag} \| I_i \rangle|^2 = |\langle I_f \| \hat{T}_\lambda^{el} \| I_i \rangle|^2 + |\langle I_f \| \hat{T}_\lambda^{mag} \| I_i \rangle|^2 \quad (\text{II.B.31})$$

Introducând (II.B.31), (II.B.23) și (II.B.20) în (II.B.30) și apoi integrând după impulsuri obținem expresia pentru rata de dezintegrare pentru emisia fotonului

$$\omega_{fi} = \frac{8\pi\alpha kc}{2I_i + 1} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (|\langle I_f \| \hat{T}_{\lambda}^{el} \| I_i \rangle|^2 + |\langle I_f \| \hat{T}_{\lambda}^{mag} \| I_i \rangle|^2) \quad (\text{II.B.32})$$

De fapt ecuația (II.B.32) reprezintă o expresie generală pentru rata de dezintegrare integrată pe întregul nivel nuclear $E = \hbar kc$. Secțiunea de fotoabsorbție va fi dată de

$$\sigma_{\gamma} = 2\pi^2 \frac{\hbar}{k^2} \omega_{fi} \quad (\text{II.B.33})$$

II.B.4 Secțiunea diferențială pentru procesul (e, e')

Amplitudinea pentru împrăștierea unui electron relativist pe o țintă nucleară poate fi calculată în ordinul α în teoria perturbațiilor independente de timp, combinând amplitudinea Coulomb în ordinul întâi, care apare în (II.B.1), cu amplitudinea doi pentru schimbul unui foton transversal de impuls $\hbar q$ care provine din ecuația (II.B.23). Deasemenea trebuie ținut cont de faptul că multipolii Coulomb și cei transversali poartă valori ale momentului cinetic diferite în lungul axei \mathbf{q} , ei neinterferând după ce se efectuează sumarea și medierea după orientările nucleare. Fără a mai intra în detaliile de calcul, care pot fi găsite în referințele [deFW66], [EG70b], [Ub71] dăm expresia secțiunii diferențiale a procesului inelastic (e, e')

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{(e,e')} &= 4\pi\sigma_{Mott} \frac{f_{rec}^{-1}}{2I_i + 1} \left\{ \frac{q_{\mu}^4}{\mathbf{q}^4} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |\langle I_f \| \hat{M}_{\lambda}(q) \| I_i \rangle|^2 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{q_{\mu}^2}{2q^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \sum_{\lambda=1}^{\infty} |\langle I_f \| \hat{T}_{\lambda}^{el}(q) \| I_i \rangle|^2 + |\langle I_f \| \hat{T}_{\lambda}^{mag}(q) \| I_i \rangle|^2 \right\} \quad (\text{II.B.34}) \end{aligned}$$

Merită enumerate câteva proprietăți de interes ale acestei formule

- Elementele de matrice satisfac regulile de selecție amintite mai devreme; în particular ele se anulează dacă nu este satisfăcută inegalitatea dublă $|I_f - I_i| \leq \lambda \leq I_f + I_i$.
- Datorită faptului că fotonul are elicitate unu, suma după multipolii transversali începe cu $\lambda = 1$; în schimb, partea Coulombiană conține monopolul $\lambda = 0$.
- Transferul de impuls \mathbf{q} poate lua orice valoare pentru împrăștierea de electroni, adică putem varia independent transferul de impuls de energia de excitație $\hbar\omega$.

- Există trei variabile leptonice în împrăștierea de electroni (k, k', θ) sau echivalent ($\mathbf{q}, \omega, \theta$), unde transferul de energie este dat de $\omega/c \equiv k - k'$. Contribuția longitudinală (Coulombiană) și cea provenind de la schimbul fotonului transversal poate fi separată păstrând primele două variabile (\mathbf{q}^2, ω) fixate și variind unghiul de împrăștiere al electronului θ . La 180° , $\tan^2 \theta/2 \rightarrow \infty$, și așa cum se observă din (II.B.34) termenul transversal domină expresia secțiunii diferențiale
- Am inclus deasemenea reculul în densitatea finală de stări prin factorul $f_{rec} = 1 + \frac{2\hbar k}{Mc} \sin^2 \theta/2$

Pe de altă parte singurile mărimi necunoscute a priori în această descriere sunt elementele de matrice ale operatorilor sarcină și curenți, între stările inițială și finală, așa numitele densități de tranziție [Ub71]. În cazul în care secțiunile de împrăștiere calculate nu se găsesc în limitele preciziei determinărilor experimentale, trebuie să tragem concluzia că sarcina și curentul care au fost calculate nu sunt corecte.

Densitățile de tranziție se definesc ca elementele de matrice reduse ale operatorilor de sarcină sau curenți între stările nucleare implicate în tranziție [HB83]. Pentru aceasta se efectuează o dezvoltare în serie a operatorilor densitate de sarcină $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ sau curent $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)$ după armonicele sferice scalare și vectoriale [UU69]

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} \hat{\rho}_{\lambda\mu}(r) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \quad (\text{II.B.35})$$

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\lambda'\mu} \hat{J}_{\lambda\lambda'}^\mu(r) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu*}(\theta, \phi) \quad (\text{II.B.36})$$

unde operatorii de densitate multipolari $\hat{\rho}_{\lambda\mu}(r)$ și $\hat{J}_{\lambda\lambda'\mu}(r)$ sunt dați de

$$\hat{\rho}_{\lambda\mu}(r) = \int d\mathbf{r} \hat{\rho}(\mathbf{r}) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (\text{II.B.37})$$

$$\hat{J}_{\lambda\lambda'}^\mu(r) = \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\theta, \phi) \quad (\text{II.B.38})$$

Elementele de matrice reduse ale acestora se vor numi atunci *densități multipolare de tranziție*

$$\rho_\lambda^{if}(r) = \langle I_f \parallel \hat{\rho}_\lambda(r) \parallel I_i \rangle \quad (\text{II.B.39})$$

$$\mathcal{J}_{\lambda\lambda'}^{if}(r) = \langle I_f \parallel \hat{J}_{\lambda\lambda'}(r) \parallel I_i \rangle \quad (\text{II.B.40})$$

Aceste cantități sunt acum funcții, și nu operatori. Acum putem substitui dezvoltările multipolare (II.B.35) și (II.B.36) în expresiile OTI care dau operatorii Coulomb (II.B.15), transversal electric (II.B.28) și magnetic (II.B.29). Calculând elementele de matrice și

apoi folosind definițiile pentru densitățile multipolare de tranziție (II.B.39) și (II.B.40), putem exprima elementele de matrice reduse care apar în definiția (II.B.34)

$$\langle I_f \parallel \hat{M}_\lambda(q) \parallel I_i \rangle = i^\lambda \int_0^\infty r^2 dr j_\lambda(qr) \rho_\lambda^{if}(r) \quad (\text{II.B.41})$$

$$\langle I_f \parallel \hat{T}_\lambda^{el}(q) \parallel I_i \rangle = \frac{i^\lambda}{\lambda} \left(\delta_{\lambda, \lambda-1} \sqrt{\lambda+1} - \delta_{\lambda, \lambda+1} \sqrt{\lambda} \right) \int_0^\infty r^2 dr j_{\lambda'}(qr) \mathcal{J}_{\lambda\lambda'}^{if}(r) \quad (\text{II.B.42})$$

$$\langle I_f \parallel \hat{T}_\lambda^{mag}(q) \parallel I_i \rangle = \int_0^\infty r^2 dr j_\lambda(qr) \mathcal{J}_{\lambda\lambda}^{if}(r) \quad (\text{II.B.43})$$

Regulile de selecție pentru diverșii termeni sunt astfel încât, pentru tranziții electrice, de paritate naturală $\pi = (-)^\lambda$, multipolul magnetic (II.B.43) este zero, în timp ce pentru tranziții magnetice, de paritate anomală $\pi = (-)^{\lambda+1}$, multipolii Coulombian (II.B.42) și transversal electric sunt zero. Deci, o singură multipolaritate contribuie la măsurarea secțiunii diferențiale (II.B.43) a unui nivel excitat. Această secțiune este determinată de trei densități ρ_λ , $\mathcal{J}_{\lambda\lambda\pm 1}$ pentru tranziții electrice și doar de $\mathcal{J}_{\lambda\lambda}$ pentru tranziții magnetice.

În mod similar, ecuația continuității

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{J}} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.B.44})$$

se poate pune sub forma

$$i\omega \hat{\lambda} \rho_\lambda^{if}(r) = \sqrt{\lambda} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda-1}{r} \right) \mathcal{J}_{\lambda\lambda-1}^{if}(r) - \sqrt{\lambda+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+2}{r} \right) \mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{if}(r) \quad (\text{II.B.45})$$

ceea ce înseamnă că în cazul tranzițiilor de paritate normală avem două în loc de trei densități independente.

Generalizând definiția (II.B.19) pentru oricare din cei trei OTI $\hat{O}_{\lambda\mu} = \hat{M}_{\lambda\mu}$, $\hat{T}_{\lambda\mu}^{el}$ și $\hat{T}_{\lambda\mu}^{mag}$ introducem factorul de formă prin

$$|F_\lambda^O(q)|^2 = \frac{4\pi}{2I_i + 1} |\langle I_f \parallel \hat{O}_\lambda(q) \parallel I_i \rangle|^2 \quad (\text{II.B.46})$$

și folosind (II.B.45) putem exprima unul din termenii care intervin în (II.B.41) și (II.B.42). Este convenabil să eliminăm $\mathcal{J}_{\lambda\lambda-1}^{if}$ astfel încât factorul de formă transversal devine ⁴

$$F_\lambda^{el}(q) = -\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \frac{\omega}{q} F_\lambda^{Coul}(q) - \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{4\pi}}{\hat{I}_i} \int_0^\infty r^2 dr j_{\lambda+1}(qr) \mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{if}(r) \quad (\text{II.B.47})$$

⁴Relația (II.B.47) este echivalentă cu (2.24) din cazul clasic

Deci, dacă determinăm F_λ^{Coul} și F_λ^{el} dintr-o combinație de unghiuri directe și de retro - împrăștiere, atunci ρ_λ și $\mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{if}$ și deci și $\mathcal{J}_{\lambda\lambda-1}^{if}$ pot fi determinați folosind (II.B.45).

Factorii de formă, care sunt accesibili determinării experimentale, sunt transformate Fourier-Bessel ale densităților [HB83]. Această transformată FB poate fi inversată și densitățile de tranziție pot fi scrise ca integrale ale factorilor de formă

$$\rho_\lambda^{if}(r) = \frac{\hat{I}_i}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty q^2 dq F_\lambda^{Coul}(q) j_\lambda(qr) \quad (II.B.48)$$

$$\mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{if}(r) = -\frac{\hat{I}_i}{\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{\lambda}}{\hat{\lambda}} \int_0^\infty q^2 dq \left[F_\lambda^{el}(q) + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \frac{\omega}{q} F_\lambda^{Coul}(q) \right] j_{\lambda+1}(qr) \quad (II.B.49)$$

$$\mathcal{J}_{\lambda\lambda}^{if}(r) = \frac{\hat{I}_i}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty q^2 dq F_\lambda^{mag}(q) j_\lambda(qr) \quad (II.B.50)$$

Mai există și alte densități multipolare de tranziție de interes în procesele (e, e'). Astfel, pentru a studia componentele rotaționale ale curentului se consideră rotorul operatorului curent :

$$\nabla \times \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\lambda'\mu} \hat{T}_{\lambda\lambda'}^\mu(\mathbf{r}) \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^{\mu*}(\theta, \phi) \quad (II.B.51)$$

și densitățile de tranziție asociate

$$\mathcal{T}_{\lambda\lambda'}^{if}(r) = \langle I_f \parallel \nabla \times \hat{J}_{\lambda\lambda'}(r) \parallel I_i \rangle \quad (II.B.52)$$

În cazul tranzițiilor de tip electric avem

$$\hat{\lambda} \mathcal{T}_{\lambda\lambda}^{if}(r) = \sqrt{\lambda+1} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\lambda-1}{r} \right) \mathcal{J}_{\lambda\lambda-1}^{if}(r) - \sqrt{\lambda} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+2}{r} \right) \mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{if}(r) \quad (II.B.53)$$

Comparând această ultimă ecuație cu (II.B.45), observăm că $\nabla \times \hat{\mathbf{J}}$ încă mai conține constrângerea determinată de legea de conservare a sarcinii și curentului. Într-adevăr, dacă considerăm operatorul (II.B.28) în aproximația lungimilor de undă mari ($qR \ll 1$, R este raza nucleului), teorema Siegert ne permite să îl rescriem

$$\hat{T}_{\lambda\mu}^{el}(q \approx 0) \rightarrow \frac{(iq)^\lambda}{(2\lambda+1)!!} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \int d\mathbf{r} r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \hat{\rho}(\mathbf{r}) \quad (II.B.54)$$

Adică pentru transferuri de impuls mici, multipolul transversal electric este proporțional cu cel Coulombian ca urmare a acestei legi ⁵.

⁵vezi (2.18)

Pentru a înlătura constrângerea conținută în $\nabla \times \hat{\mathbf{J}}$, considerăm vectorul *vorticitate* $\boldsymbol{\omega}$ și densitatea multipolară de tranziție asociată acestuia [RW87]

$$\omega_{\lambda\lambda}^{if}(r) = \mathcal{T}_{\lambda\lambda}^{if}(r) - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \omega \rho_{\lambda}^{if}(r) \quad (\text{II.B.55})$$

Cantitatea $\boldsymbol{\omega}$ conține toată informația fizică despre $\mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{fi}(r)$, și este neconstrânsă de legea de conservare a sarcinii și curentului. Combinând (II.B.45), (II.B.53) și (II.B.55) $\omega_{\lambda\lambda}$ poate fi exprimat în funcție de $\mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{fi}(r)$:

$$\omega_{\lambda\lambda}(r) = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\lambda}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\lambda+2}{r} \right) \mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{fi}(r) \quad (\text{II.B.56})$$

Putem afirma că atunci când un experimentator găsește că pentru o tranziție particulară, $\mathcal{J}_{\lambda\lambda+1}^{fi}(r) \neq 0$, el a determinat că tranziția respectivă este însoțită de vorticitate.

Capitolul III

Contribuții Toroidale la Mișcările Colective de Rotație - Vibrație

5

Modelul Rotatorului Riemann

Caracterul dinamic al mișcării de rotație nucleară este una dintre problemele fundamentale încă nerezolvate în teoria structurii nucleare. Până în prezent au fost făcute multe încercări pentru a se clarifica dacă materia nucleară poate fi imaginată ca un fluid cuantic care admite numai curgeri de tip irotațional (IF), sau este un rotator cuantic care dă naștere la o rotație rigidă a întregului nucleu.

În analogie cu picătura de lichid clasică, modelul Bohr - Mottelson presupune un câmp de viteze nuclear de tip irotațional [Bo52]. Ipoteza curgerii irotaționale, însă, prezice un moment de inerție care este de cinci ori mai mic decât valoarea obținută experimental. Folosind o deducere cuazi - microscopică, Villars [Vil57a], [Vil57b] a arătat că efectuând o transformare canonică fundamentală, energia cinetică a unui sistem de nucleoni se va separa într-o parte rotațională, una depinzând de coordonatele intrinseci, una depinzând de coordonatele intrinseci și una de cuplaj de tip Coriolis care este neglijabilă. Acest cuplaj dintre momentul cinetic în raport cu centrul de masă și momentul cinetic intrinsec $L_{\hat{A}}L'_{\hat{B}}$ este responsabil de renormalizarea momentului de inerție al picăturii de lichid \mathcal{I}_{IF} pentru a genera momentul de inerție efectiv dat de experiment. Deci, un cuplaj rotațional intrinsec este fundamental pentru curgerea irotațională. Într-o imagine naivă, putem vizualiza curgerea irotațională ca o undă de deformare care se propagă pe suprafața nucleului, paralel cu o mișcare corespunzătoare a structurii intrinseci, astfel încât momentul cinetic rezultat să fie mic [Row70a], [Row70b], așa cum am arătat în fig.5.1(c)

La cealaltă extremă se află rotația de corp rigid, a cărui câmp de viteze este dat în fig.5.1(a). Așa cum a arătat Rowe, este preferabil să se întrebuițeze, mai degrabă, noțiunea de *curgere rotațională*, decât de curgere de corp rigid, pentru a înlătura posibilitatea ca nucleonii să fie înghețați în pozițiile lor. În cazul acesta se efectuează o simplă transformare de rotație asupra coordonatelor nucleonilor astfel încât este absent orice cu-

Figura 5.1: Diferite tipuri de curgeri fluide ale materiei nucleare : (a) rotație rigidă, (b) curgere vorticală și (c) curgere irotațională.

plaj între gradele de libertate rotaționale și cele colective. Deci, spre deosebire de cazul modelului picăturii irotaționale, în cazul curgerii rotaționale, termenii de cuplaj Coriolis se anulează. Acest lucru se datorează faptului că *momentul cinetic intrinsec* L' se anulează în coordonatele curgerii rotaționale, adică sistemul legat de axe (sistemul intrinsec) nu poartă moment cinetic. Cu toate acestea, ipoteza curgerii rotaționale conduce la un moment de inerție \mathcal{I}_{RR} , al benzii fundamentale, de două ori mai mare decât cel experimental. Acest lucru se datorește faptului că în urma transformării ortogonale asupra coordonatelor va mai rămâne un cuplaj rotațional intrinsec de tip centrifugal provenind de la dependența lui \mathcal{I}_{RR} de coordonatele intrinseci. Deci, pentru ca rotația să fie rigidă este necesară cerința ca nucleul deformat să aibă suficientă rigiditate pentru a suprima efectele de cuplaj centrifugal.

Prin urmare, dinamica rotațională nucleară la viteze unghiulare mici este un compromis între cele concepții limită : curgere irotațională și curgere rotațional rigidă.

Abordările algebrice ale acestei probleme clarifică în bună măsură chestiunea alegerii modelului cel mai convenabil pentru descrierea rotației nucleare. Baza tratărilor algebrice o constituie conceptul de *grup dinamic*, opus conceptului de *grup de simetrie*. Un grup de simetrie al unei transformări lasă Hamiltonianul invariant și dă naștere unor multipleți degenerați de stări care poartă reprezentări ale grupului respectiv. Exemple tipice sunt grupul rotațiilor $SO(3)$ [GMS58] și grupul izospinului $SU(2)$ [Gil74].

Pe de altă parte, un grup dinamic implică ca numai stările proprii ale Hamiltonianului

să aparțină unei reprezentări ireductibile unice a grupului fără a mai cere ca toate stările unei reprezentări ireductibile să fie degenerete. Un exemplu întâlnit în problemele de structură nucleară îl reprezintă oscilatorul armonic tridimensional, a cărui grup dinamic este grupul symplectic tridimensional $Sp(3, \mathbf{R})$, în timp ce grupul său de simetrie este $SU(3)$ [Wyb74]. Un alt exemplu este dat de modelul Elliott în care $SU(3)$ și grupul său $SO(3)$ sunt ambele grupuri dinamice, însă numai $SO(3)$ este un grup de simetrie. Deci, în modelul Elliott, diferitele stări ale momentului cinetic ale unei reprezentări ireductibile $SU(3)$ sunt separate în energie, dar multipletii unui moment cinetic dat rămân degenerați. Algebra Lie a unui grup dinamic mai este cunoscută în literatura de specialitate anglo-saxonă sub denumirea de *spectrum generating algebra*.

Grupul symplectic (necompact) $Sp(3, \mathbf{R})$ apare ca fiind cel mai convenabil grup dinamic pentru tratarea teoriei mișcărilor colective [RR76a], [RR77a], [RR77b] și [RR77c]. Faptul că grupul symplectic este deasemenea un grup dinamic pentru oscilatorul armonic, care joacă un rol crucial în modelul în pături, facilitează construcția unui formalism model în pături symplectic foarte eficient, în care sunt efectuate calcule de tip model în pături microscopice într-o bază de oscilator armonic $SU(3)$ și apoi interpretate în limbajul modelului colectiv [Row85]. $Sp(3, \mathbf{R})$ are două lanțuri de subalgebre principale [Ros92a]:

1. Lanțul Modelului Colective $SO(3) \subset ROT(3) \subset GCM(3) \subset Sp(3, \mathbf{R})$
2. Lanțul Modelului în pături $SO(3) \subset SU(3) \subset Sp(3, \mathbf{R})$

Lanțul modelelor colective furnizează interpretarea fizică a simetriei symplectice. Astfel, grupul $ROT(3)$ este generat de operatorul de cuadrupol uniparticulă

$$Q_{2\mu} = \sum_{\alpha} r_{\alpha}^2 Y_{2\mu}(\theta_{\alpha}, \phi) \quad (5.1)$$

și algebra momentului cinetic $SO(3)$ [Ui70], [WBC73]. În realizarea sa clasică, $ROT(3)$ este chiar modelul rotatorului rigid în timp ce forma sa cuantică este modelul rotatorului adiabatic despre care am vorbit mai sus. Acest model permite interpretarea fizică a ratelor tranzițiilor cuadrupolare determinate experimental în funcție de forma statică a nucleului. Mai exact, cei doi operatori Casimir ai lui $ROT(3)$ determină deformarea elipsoidului de inerție, adică cantitățile β și γ .

Cusson [Cus68] a găsit o structură algebrică mai interesantă, considerând în loc de operatorii cuadrupolari (5.1) derivatele lor în raport cu timpul

$$\dot{Q}_{2\mu} = \frac{i}{\hbar} [H, Q_{2\mu}] \quad (5.2)$$

unde H este Hamiltonianul sistemului. Operatorul de mai sus a fost numit operator de forfecare (*shear*) și în cazul în care potențialul este independent de viteze se poate pune sub forma

$$S_{ij} = \sum_{\alpha} \left(x_{\alpha i} p_{\alpha j} + x_{\alpha j} p_{\alpha i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} r_{\alpha} p_{\alpha} \right) \quad (5.3)$$

Este interesant de notat că acest operator tensorial are aceeași natură cuadripolară cu tensorul presiunilor P_{ij} în aproximația celor treisprezece momente din DFN (3.11), având urma zero, datorită condiției de incompresibilitate. Cele cinci componente ale tensorului S_{ij} împreună cu generatorii lui $SO(3)$, formează algebra $sl(3, \mathbf{R})$ [WB72]. În cazul în care renunțăm la condiția de incompresibilitate se generează algebra transformărilor general liniare $gl(3, \mathbf{R})$ [GR76]. În acest model general liniar curgerea colectivă satisface o ecuație de forma

$$x_i(t) = \sum_j g_{ij}(t) x_j(0) \quad (5.4)$$

unde $g(t) = (g_{ij}(t))$ este o matrice 3×3 dependentă de timp.

Câmpul de viteze ($v_i = \dot{x}_i$) pentru astfel de curgeri este dat de

$$v_i(t) = \sum_j \dot{g}_{ij}(t) x_j(0) \quad (5.5)$$

unde $\dot{g}_{ij} = dg_{ij}/dt$. Observăm imediat că pentru rotații rigide, $g(t)$ trebuie să fie o matrice ortogonală (rotație), implicând că $\dot{g}(t)$ este antisimetrică, iar viteza de curgere poate fi exprimată ca

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.6)$$

Pe de altă parte, pentru curgeri irotacionale, avem

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (5.7)$$

care este satisfăcută dacă $\dot{g}(t)$ este simetrică. Cum $g(t)$ poate avea părți și simetrice și antisimetrice, modelul curgerii liniar generale admite câmpuri de viteze de tip rotator rigid dar și irotacional. Vom spune în primul caz că avem o curgere pur vorticală, iar în al doilea caz avem de a face cu un câmp de viteze liber de vorticitate. Acestea sunt două cazuri extreme și deci putem alege transformarea liniar-generală g de așa manieră încât să obținem un câmp de viteze intermediar între cele două. Astfel grupul $GL(3, \mathbf{R})$ admite moduri vibraționale de tipul

$$x_i(t) = g_i(t) x_i(0) \quad (5.8)$$

Avem în total 9 grade de libertate de tip colectiv din care unul este de tip compresional (*breathing mode*), care dispare în cazul grupului dinamic $SL(3, \mathbf{R})$.

Pentru a permite existența unei energii potențiale care este o funcție de dimensiunea și deformarea nucleului, algebrele Lie ale grupurilor de mișcare $SL(3, \mathbf{R})$ și $GL(3, \mathbf{R})$ trebuie să fie suplimentate cu cei șase operatori cuadrupolari Q_{ij} [RR76b]. Atunci, se va obține grupul special al mișcării colective $SCM(3) \equiv [\mathbf{R}^6] SL(3, \mathbf{R})$ pentru curgeri incompresibile, și respectiv grupul general al mișcării colective $GCM(3) \equiv [\mathbf{R}^6] GL(3, \mathbf{R})$ pentru curgeri compresibile. $CM(3)$ permite o trecere continuă a dinamicii rotaționale de la rotația rigidă la curgerea irotațională [Cus68], fiind deci o generalizare a modelului Bohr-Mottelson [RR79], [RR80], astfel încât să fie permisă circulația hidrodinamică, adică vorticitatea. Corespondentul clasic al $GCM(3)$ este dat de modelul Riemann pentru stele și galaxii în rotație despre vom vorbi mai târziu.

Operatorii Casimir ai lanțului modelului colectiv joacă un rol cheie în interpretarea sa fizică. După cum am mai spus, cazimirii lui $ROT(3)$ măsoară deformarea β și triaxialitatea γ a elipsoidului de inerție. $GCM(3)$ are un singur operator Casimir, \mathcal{L}^2 , care este pătratul vectorului circulație Kelvin [WCB76], [Ros88]. Când circulația Kelvin se anulează, atunci câmpul de viteze devine irotațional. Atunci când circulația Kelvin crește, câmpul de viteze devine mai puțin irotațional. În Mecanica Cuantică, circulația \mathcal{L} este cuantificată prin multiplii întregi nenegativi ai lui \hbar iar operatorul Casimir are ca valori proprii $\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1)\hbar^2$ [RR76b], [WCB76], [Ros88] și [GR76].

Lanțul modelului în pături traversează algebra de simetrie $SU(3)$ a oscilatorului armonic. Stările simplectice sunt adaptate la lanțul $SU(3)$ și sunt configurații de model în pături ale stărilor proprii ale Hamiltonianului oscilatorului armonic H_0 și sunt indexate de numerele cuantice Elliott (λ, μ) [Ell63]. Transformările care duc de la lanțul modelului în pături la lanțul modelelor colective (geometrice) ne dau o interpretare cinematică a configurațiilor de model în pături.

Am afirmat mai sus că lanțul colectiv dă o interpretare fizică teoriei simplectice. Trebuie însă subliniat faptul că o teorie sau un model fizic legat de una dintre aceste algebre cinematice nu este unică. Ea va depinde de teoria dinamică și de completitudinea gradelor de libertate ale modelului. Într-adevăr, fiecare dintre aceste algebre cinematice îi sunt asociate patru modele fizice diferite : modele macroscopice clasice și cuantice și teorii microscopice clasice și cuantice. Alegerea unei realizări clasice sau cuantice este un atribut al legii dinamice. Dacă singurele grade de libertate incluse în model sunt cele corespunzătoare generatorilor algebrei, atunci avem de aface cu un model macroscopic. Dacă însă păstrăm toate gradele de libertate individuale, vom vorbi despre o teorie microscopică.

Un model macroscopic va cere o realizare a gradelor de libertate asociate generatorilor

algebrei. Pentru un model cuantic, o reprezentare unitară ireductibilă (RUI) pe un spațiu Hilbert va împlini acest deziderat. Toate RUI ale sumei semidirecte ale algebrelor Lie din lanțul colectiv sunt date de construcția inductivă a lui Mackey [Mac68]. Modelele cuantice pot fi obținute din modelele clasice folosind cuantificarea geometrică [Wo80].

În cursul acestui capitol ne vom concentra atenția asupra realizării macroscopice clasice a lui $GCM(3)$, adică modelului elipsoidului Riemann, fiind cu precădere interesați de natura câmpului de viteze rotațional, prezis de model.

5.1 Cinematica Dirichlet a Elipsoidului

La jumătatea secolului trecut, marele matematician francez Dirichlet, lansa o problemă foarte concretă în legătură cu formele (figurile) de echilibru ale corpurilor în rotație uniformă [Ch69] : ”În ce condiții putem avea o configurație care la fiecare moment prezintă o figură elipsoidală și în care mișcarea, într-un sistem de referință inerțial, este o funcție liniară de coordonate ?”. Problema formulată în această manieră, face distincție clară între două sisteme de referință : un *sistem inerțial* (SI) fixat în spațiu și un *sistem în mișcare* (SM), a cărui axe coincid, la orice moment, cu axele principale ale elipsoidului. Sistemul în mișcare va avea o orientare variabilă și deci vom fi interesați să deducem ecuațiile hidrodinamice în astfel de sisteme.

Considerăm două sisteme de referință cu origine comună : un SI (X_1, X_2, X_3) și un SM (x_1, x_2, x_3) . Se presupune că orientarea SM, în raport cu SI depinde de timp. Fie $R(t)$ o rotație care leagă coordonatele unui punct în SI \mathbf{X} de coordonatele sale în SM \mathbf{x} . Atunci

$$\mathbf{x} = R\mathbf{X} \quad (5.9)$$

Cum R trebuie să fie o transformare ortogonală

$$RR^t = \mathbf{1} \quad (5.10)$$

unde R^t este transpusa matricei R . Din această condiție de ortogonalitate rezultă că matricea

$$\Omega = \frac{dR}{dt}R^t \quad (5.11)$$

este antisimetrică, din moment ce

$$\Omega = -\Omega^t \quad (5.12)$$

Deci R reprezintă un element al grupului rotațiilor $SO(3)$, dependent de timp, iar Ω este un element al algebrei Lie $so(3)$. Dualul ω , al matricei Ω este un vector care reprezintă

viteza unghiulară, iar componentele sale sunt date de

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \quad (5.13)$$

Evident că $\omega(t)$ reprezintă o rotație dependentă de timp a sistemului (x_1, x_2, x_3) în raport cu SI.

Adesea este convenabil să se lucreze cu cantități cinematice definite în raport cu SI. Fie $\mathbf{F}(t)$ un vector dependent de timp, definit în SI. Componentele sale, de-alungul axelor de coordonate instantanee ale SI, sunt date de

$$\mathbf{F}_x = R\mathbf{F} \quad (5.14)$$

sau

$$\mathbf{F} = R^t\mathbf{F}_x \quad (5.15)$$

Derivând această ultimă ecuație în raport cu timpul, obținem

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{dR^t}{dt}\mathbf{F}_x + R^t\frac{d\mathbf{F}_x}{dt} \quad (5.16)$$

Multiplicând cu R și exprimând după coordonatele SM, (5.16) devine

$$R\frac{d\mathbf{F}}{dt} = -\Omega(R\mathbf{F}) + \frac{d}{dt}(R\mathbf{F}) \quad (5.17)$$

Cum \mathbf{F} este un vector arbitrar, ecuația operatorială

$$R\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt} - \Omega\right)R \quad (5.18)$$

este aplicabilă oricărui vector definit în SI. Particularizând la vectorul \mathbf{X} și vectorul viteză $d\mathbf{X}/dt$, ecuația (5.18) devine

$$R\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} - \Omega\right)R\mathbf{X} \quad (5.19)$$

$$R\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt} - \Omega\right)R\frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad (5.20)$$

Introducând vectorul viteză în SI rotit în SM, și respectiv viteza fluidului determinată de un observator aflat în repaos în SM

$$\mathbf{U} = R\frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (5.22)$$

putem rescrie (5.19) și (5.20) sub forma

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} - \Omega\mathbf{x} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (5.23)$$

$$R \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} - \Omega\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} \quad (5.24)$$

Membrul stâng al ecuației (5.24) reprezintă accelerația în SI, cu componentele de-alungul direcțiilor instantanee ale axelor de coordonate în SM. Ecuația hidrodinamică (II.A.5), care guvernează mișcarea unui fluid va fi dată de

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} - \Omega\mathbf{U} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi \right) \quad (5.25)$$

unde gradientul este exprimat în coordonatele SM

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} \quad (5.26)$$

Ca urmare a acestei ultime ecuații, putem rescrie (5.25), în notații carteziene

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \rho \Omega_{im} U_m - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (5.27)$$

în timp ce ecuația continuității va avea forma cunoscută

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (5.28)$$

În problema Dirichlet se consideră o masă omogenă fluidă care prezintă o formă elipsoidală la fiecare moment în timp ce $\mathbf{X}(t)$ este o funcție liniară de coordonate ale elementului de fluid într-un SI fixat la un moment inițial $t = 0$. Dacă notăm prin a_1 , a_2 și a_3 lungimile axelor principale, suprafața care mărginește masa de fluid este dată de ecuația

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (5.29)$$

în sistemul intrinsec pentru care axele principale sunt aliniat cu axele carteziene. Un sistem de coordonate pentru elipsoid este dat de

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 &= a_2 r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= a_3 r \cos \theta \end{aligned} \quad (5.30)$$

cu $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ și $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Elementul de volum în acest sistem de coordonate este $d\mathbf{r} = a_1 a_2 a_3 r^2 dr d\Omega$ cu $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Atunci, volumul elipsoidului va fi

$$v = \int d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{3} a_1 a_2 a_3 \quad (5.31)$$

Constanța masei va cere ca $a_1 a_2 a_3 = \text{constant}$.

Considerăm în continuare că SM considerat mai sus este ales astfel încât axele sale de coordonate coincid cu axele principale ale elipsoidului. Fără a pierde din generalitate vom presupune că la momentul inițial $t = 0$, SI și SM coincid

$$X_i(0) = x_i(0) \quad (5.32)$$

În problema Dirichlet se presupune că $\mathbf{X}(t)$ este o funcție liniară de $\mathbf{x}(0)$. Dacă presupunem că și lungimile axelor principale sunt dependente de timp, vom introduce matricea

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_3(t) \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

cu $A_0 = A(t = 0)$. Definind $\mathbf{y}(t) = A(t)^{-1} \mathbf{x}(t)$ și $\mathbf{y}_0 = A_0^{-1} \mathbf{x}_0$, constrângerea curgerii Dirichlet face ca

$$\mathbf{X}(t) = g(t) \mathbf{y}_0 \quad (5.34)$$

unde așa cum vom vedea mai departe $g(t)$ este un element al grupului $GL(3)$. În virtutea ecuației (5.34) putem scrie

$$A^{-1} \mathbf{x} = S A_0^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (5.35)$$

unde

$$S = A^{-1} \cdot R \cdot g \quad (5.36)$$

Cu alte cuvinte, $S(t)$ este o transformare liniară care leagă pe $A^{-1} \mathbf{x}$ la momentul t de valoarea sa la momentul inițial $t = 0$.

Să considerăm elementele fluidului care se află pe frontiera elipsoidului. Din moment ce nu poate exista o mișcare normală pe o frontieră liberă, atunci aceste elemente care constituie frontiera, trebuie să rămână tot timpul aceleași. Pentru un element de pe frontiera elipsoidului, vectorul $A^{-1} \mathbf{x}$ este un vector unitate; prin urmare el trebuie să rămână un vector unitar în urma transformării (5.35). Deci, S trebuie să fie, la fel ca și R o matrice ortogonală

$$SS^t = \mathbf{1} \quad (5.37)$$

Și așa cum R definește o matrice antisimetrică Ω , tot așa, existența matricii ortogonale S ne va permite să definim matricea antisimetrică

$$\Lambda = \frac{dS}{dt} S^t \quad (5.38)$$

Dualul λ , va fi legat de Λ prin

$$\Lambda_{ij} = \varepsilon_{ijk} \lambda_k, \quad \lambda_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Lambda_{jk} \quad (5.39)$$

În consecință, problema Dirichlet se reduce la găsirea unei matrici g care să determine $X(t)$ printr-o ecuație de forma (5.34) și, simultan, să se poate exprima în funcție de două matrici ortogonale R și S

$$g = R^t \cdot A \cdot S \quad (5.40)$$

unde

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda S, \quad \frac{dR}{dt} = \Omega R, \quad S(0) = R(0) = 1 \quad (5.41)$$

O consecință imediată a relațiilor de mai sus este aceea că o intervertire a lui Λ cu Ω dă o intervertire a lui S cu R și transformă pe g în transpusa sa g^t .

Câteva comentarii în legătură cu (5.40) sunt necesare. Dacă R reprezintă rotația sistemului de referință intrinsec, atunci

$$\mathbf{x}(t) = A \cdot S \mathbf{y}_0 \quad (5.42)$$

Dacă A se alege în forma (5.33), atunci A^{-1} transformă elipsoidul într-o sferă de rază unitate. Atunci, un punct \mathbf{y} , interior suprafeței sferice transformate este constrâns ca în locul curgerii Dirichlet să efectueze o mișcare pur rotațională

$$\mathbf{y}(t) = S \mathbf{y}_0 \quad (5.43)$$

Această constrângere arată că nu poate exista o componentă a vitezei \mathbf{u} , normală la frontiera elipsoidală atunci când lungimile axelor principale sunt constante. Deci, curgerea Dirichlet este compatibilă cu geometria unui elipsoid.

Am văzut că adeseori este preferabil să adoptăm constrângerea ca mișcarea fluidului să fie curgere incompresibilă. Pentru aceasta este necesar ca $g(t)$ să fie un element a lui $SL(3)$, adică al grupului matricilor de determinant unitate. În acest caz matricea diagonală A din (5.40) trebuie să aibă determinant unitate

$$A = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Transformarea $\mathbf{x} \rightarrow A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ aplică punctele elipsoidului într-o sferă de rază $R_0 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$. Această curgere este incompresibilă, deoarece volumul elipsoidului este egal cu cel al sferei (cf.(5.31)).

Am văzut mai sus că Ω este echivalent cu o rotație dependentă de timp. Semnificația lui Λ va deveni mai clară dacă vom scrie componentele vitezei fluidului. Cum (cf. (5.21), (5.34) și (5.35))

$$\mathbf{U} = R \frac{dg}{dt} S^t A^{-1} \mathbf{x} \quad (5.45)$$

sau, folosind expresia (5.40) pentru g

$$\mathbf{U} = R \left(R^t A \frac{dS}{dt} + \frac{dR^t}{dt} A S + R^t \frac{dA}{dt} S \right) S^t A^{-1} \mathbf{x} \quad (5.46)$$

și respectiv

$$\mathbf{U} = \left(A \Lambda A^{-1} - \Omega + \frac{dA}{dt} A^{-1} \right) \mathbf{x} \quad (5.47)$$

dacă folosim relațiile de ortogonalitate (5.10), (5.37) și ecuațiile de evoluție pentru R și S (5.41). Comparând ecuațiile (5.23), (5.47) observăm că mișcarea fluidului constă dintr-o rotație uniformă cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ care se suprapune peste mișcarea internă

$$\mathbf{u} = \left(A \Lambda A^{-1} + \frac{dA}{dt} A^{-1} \right) \mathbf{x} \quad (5.48)$$

din sistemul de referință în care orientarea axelor elipsoidului rămâne fixă. Deci câmpul de viteze (5.48) în SM este o funcție liniară de coordonate, conform constrângerii Dirichlet, componentele sale fiind date de

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a_1}{a_2} \lambda_3 x_2 - \frac{a_1}{a_3} \lambda_2 x_3 + \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt} x_1 \\ u_2 &= \frac{a_2}{a_3} \lambda_1 x_3 - \frac{a_2}{a_1} \lambda_3 x_1 + \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{dt} x_2 \\ u_3 &= \frac{a_3}{a_1} \lambda_2 x_1 - \frac{a_3}{a_1} \lambda_1 x_2 + \frac{1}{a_3} \frac{da_3}{dt} x_3 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Vorticitatea ζ (II.A.5) acestei mișcări, va avea componentele

$$\zeta_k = -\frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i a_j} \lambda_k \quad (5.50)$$

unde i, j, k sunt indici ciclici. Suprapusă peste componentele vorticiale ale câmpului \mathbf{u} mai există o mișcare de compresiune de componente

$$\frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt} x_i \quad (5.51)$$

Derivata în raport cu timpul a lui \mathbf{U} (5.47) poate fi explicitată folosind (5.35)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left[\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{d}{dt}(A\Lambda - \Omega A) + \frac{dA}{dt}\Lambda + A\Lambda^2 - \Omega A\Lambda \right] A^{-1}\mathbf{x} \quad (5.52)$$

Neglijând forțele externe ¹, ecuația de mișcare (5.25) devine

$$\rho \left[\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{d}{dt}(A\Lambda - \Omega A) + \frac{dA}{dt}\Lambda - \Omega \frac{dA}{dt} + A\Lambda^2 + \Omega^2 A - 2\Omega A\Lambda \right] A^{-1}\mathbf{x} = \nabla p \quad (5.53)$$

Cum membrul stâng al ecuației diferențiale (5.53) est o funcție liniară omogenă de coordonate, integrarea acestei ecuații va conduce la următoarea expresie pentru presiune

$$p = p_c(t) \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \quad (5.54)$$

unde $p_c(t)$ este presiunea centrală, iar coeficienții α_{ij} sunt funcții de timp dacă ținem cont de condiția la frontieră pentru p care cere ca această cantitate să se anuleze pe suprafața elipsoidului. Substituind (5.54) în ecuația de mișcare, ajungem la rezultatul final

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{d}{dt}(A\Lambda - \Omega A) + \frac{dA}{dt}\Lambda - \Omega \frac{dA}{dt} + A\Lambda^2 + \Omega^2 A - 2\Omega A\Lambda = \frac{2p_c}{\rho} A^{-1} \quad (5.55)$$

Ecuația (5.55) împreună cu condiția de conservare a volumului (5.31) va da un set de zece ecuații necunoscute : a_1, a_2, a_3, p_c și componentele lui $\boldsymbol{\lambda}$ și $\boldsymbol{\omega}$.

Ecuația (5.55) admite trei integrale prime care reprezintă conservarea energiei, momentului cinetic și a circulației. Pentru a arăta acest lucru, vom scrie elementele diagonale și nedigonale ale ecuației matriciale (5.55), folosind convenția de sumare a indicilor muți a lui Einstein

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} - a_i \left[(\lambda_j^2 + \lambda_k^2) + (\omega_j^2 + \omega_k^2) \right] + 2(a_j \lambda_k \omega_k + a_k \lambda_j \omega_j) = \frac{2p_c}{\rho a_i} \quad (5.56)$$

$$2 \frac{d}{dt}(a_i \lambda_k - a_j \omega_k) - a_i \frac{d\lambda_k}{dt} + a_j \frac{d\omega_k}{dt} + a_i \lambda_i \lambda_j + a_j \omega_j \omega_i - 2a_k \lambda_i \omega_j = 0 \quad (5.57)$$

și

$$2 \frac{d}{dt}(a_i \omega_k - a_j \lambda_k) - a_i \frac{d\omega_k}{dt} + a_j \frac{d\lambda_k}{dt} + a_i \omega_i \omega_j + a_j \lambda_j \lambda_i - 2a_k \omega_i \lambda_j = 0 \quad (5.58)$$

cu i, j, k indici ciclici.

¹În realitate ar trebui să presupunem, în cazul nucleelor în rotație, existența unui potențial electrostatic datorat respingerii celor Z protoni aflați în interiorul frontierei elipsoidale. Introducerea acestui termen nu este absolut necesară pentru ceea ce urmărim în această secțiune. Luarea sa în considerare este făcută în anexa III.A.

Integrala energiei se va obține înmulțind ecuațiile (5.56), (5.57) și (5.58) cu da_i/dt , $a_i\lambda_k - a_j\omega_k$ și $a_i\omega_k - a_j\lambda_k$, și sumând după după diferitele seturi i, j, k . După efectuarea unui calcul direct găsim

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{da_i}{dt} \right)^2 + \sum_{i \neq j \neq k} (\lambda_i^2 + \omega_i^2)(a_j^2 + a_k^2) - 4 \sum_{i \neq j \neq k} a_i a_j \lambda_k \omega_k \right] = \frac{2p_c}{\rho} \sum \frac{1}{a_i} \frac{da_i}{dt} \quad (5.59)$$

Din condiția de conservare a volumului ($a_1 a_2 a_3 = \text{constant}$), membrul stâng se va anula. Prin urmare obținem integrala

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{da_i}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} (\lambda_i^2 + \omega_i^2)(a_j^2 + a_k^2) - 2 \sum_{i \neq j \neq k} a_i a_j \lambda_k \omega_k = \text{constant} \quad (5.60)$$

În continuare, înmulțind ecuațiile (5.57) și (5.58) prin $a_i [2a_i a_j - (a_i^2 + a_j^2)\lambda_k]$ și $-a_j [2a_i a_j \omega_k - (a_i^2 + a_j^2)\lambda_k]$, adunând și apoi sumând după diferitele seturi ($i \neq j \neq k$), găsim că

$$\sum_{i \neq j \neq k} [2a_i a_j \omega_k - (a_i^2 + a_j^2)\lambda_k]^2 = \text{constant} \quad (5.61)$$

Cum ecuațiile de bază sunt invariante la schimbarea lui Λ cu Ω , putem afirma existența unei alte integrale prime

$$\sum_{i \neq j \neq k} [2a_i a_j \lambda_k - (a_i^2 + a_j^2)\omega_k]^2 = \text{constant} \quad (5.62)$$

Componentele momentului cinetic sunt date de

$$L_i = \varepsilon_{ijk} \int_v \rho x_j U_k dx \quad (5.63)$$

și calculând această expresie cu ajutorul ecuației (5.47) găsim

$$L_k = \frac{M}{5} [(a_i^2 + a_j^2)\omega_k - 2a_i a_j \lambda_k]^2 \quad (5.64)$$

Prin urmare ecuația (5.62) reprezintă conservarea lui \mathbf{L} .

Dacă înlocuim λ_k în integrala (5.61) prin expresia care o leagă de vorticitate (5.50), vom avea

$$\sum_{i \neq j \neq k} a_i^2 a_j^2 (2\omega_k + \zeta_k)^2 = \text{constant} \quad (5.65)$$

Introducând vectorul circulație \mathcal{L} care este definit prin integrala de linie a câmpului de viteze în jurul elipselor C_k care mărginesc planele principale $i - j$

$$\mathcal{L}_k = \frac{M}{5\pi} \oint_{C_k} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.66)$$

obținem, efectuând aceleași manipulări algebrice ca în cazul integralei momentului cinetic că

$$\mathcal{L} = \frac{M}{5} a_i a_j (\zeta_k + 2\omega_k) = \frac{M}{5} [2a_i a_j \omega_k - (a_i^2 + a_j^2) \lambda_k] \quad (5.67)$$

Prin urmare (5.65) reprezintă conservarea circulației în sistemul intrinsec.

5.2 Elipsoizi Riemann

Riemann a învederat, în urmă cu mai bine de un secol, o soluție la problema figurilor elipsoidale staționare care sunt admisibile în formularea generală a lui Dirichlet. Această clasificare este făcută pentru cazul în care $\boldsymbol{\omega}$ și $\boldsymbol{\zeta}$ sunt independente de timp și constante.

În condiții staționare, putem presupune că axele principale ale elipsoidului sunt în repaos într-un sistem de referință care se rotește cu viteză unghiulară constantă $\boldsymbol{\omega}$, și că în acest sistem în rotație există mișcări interne cu vorticitate constantă $\boldsymbol{\zeta}$. Vom considera orientarea axelor de coordonate ale sistemului în rotație, identică cu a axelor principale ale elipsoidului. Atunci, din condiția cinematică de conservare a frontierei elipsoidale, componentele câmpului de viteze (5.49) devin

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta_3 x_2 + \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_3^2} \zeta_2 x_3 \\ u_2 &= -\frac{a_2^2}{a_2^2 + a_3^2} \zeta_1 x_3 + \frac{a_2^2}{a_2^2 + a_1^2} \zeta_3 x_1 \\ u_3 &= -\frac{a_3^2}{a_1^2 + a_3^2} \zeta_2 x_1 + \frac{a_3^2}{a_3^2 + a_2^2} \zeta_1 x_2 \end{aligned} \quad (5.68)$$

Pentru a obține condițiile în care elipsoidul va fi în echilibru gravitațional, vom folosi ecuațiile virialului de ordinul doi în forma dată de (III.A.16). Vom scrie mai întâi componentele nediagonale ale acestei ecuații.

Cum în sistemul de coordonate ales tensorii I_{ij} și \mathcal{W}_{ij} sunt diagonali iar \mathbf{u} dat de (5.68) satisface $\int_V d\mathbf{r} \rho u_i x_j = 0$ ($i = j$), componentele (2,3) și (3,2) ale lui (III.A.16) adunate și respectiv scăzute, vor arăta după cum urmează

$$4\mathcal{T}_{23} - \omega_2 \omega_3 (I_{22} + I_{33}) + 2 \int_V d\mathbf{r} \rho u_1 (\omega_2 x_2 - \omega_3 x_3) = 0 \quad (5.69)$$

$$-\omega_2 \omega_3 (I_{22} - I_{33}) - 2 \int_V d\mathbf{r} \rho u_1 (\omega_2 x_2 - \omega_3 x_3) = 0 \quad (5.70)$$

unde \mathcal{T}_{23} este dat de (III.A.6) iar I_{ij} de (III.A.15). Pentru mișcarea specificată de ecuația (5.68)

$$\mathcal{T}_{23} = -\frac{1}{2} \frac{a_2^2 a_3^2}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1^2 + a_3^2)} \zeta_2 \zeta_3 I_{11} \quad (5.71)$$

și

$$\int_V d\mathbf{r} \rho u_1 x_2 = -\frac{a_1^2}{(a_1^2 + a_2^2)} \zeta_3 I_{22}, \quad \int_V d\mathbf{r} \rho u_1 x_3 = \frac{a_1^2}{(a_1^2 + a_3^2)} \zeta_2 I_{33} \quad (5.72)$$

Substituind aceste relații în ecuațiile (5.69) și (5.70), împreună cu valorile lui I_{ij} obținem, după o serie de manipulări algebrice că

$$\left(\frac{\zeta_2}{\omega_2}\right)^2 + (4a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) \frac{a_1^2 + a_3^2}{2a_1^2 a_3^2} \left(\frac{\zeta_2}{\omega_2}\right) + \frac{(a_1^2 + a_3^2)^2}{a_1^2 a_3^2} = 0 \quad (5.73)$$

În deducerea ecuației de mai sus am presupus că ω_2 și ω_3 sunt diferite de zero astfel încât rapoartele $\left(\frac{\zeta_2}{\omega_2}\right)$ și $\left(\frac{\zeta_3}{\omega_3}\right)$ devin determinate. Dacă pe de altă parte și $\omega_1 \neq 0$, atunci efectuând același raționament, componentele (1,2) și (2,1) ale ecuației (III.A.16) vor conduce la ecuația

$$\left(\frac{\zeta_2}{\omega_2}\right)^2 + (4a_3^2 - a_2^2 + a_1^2) \frac{a_1^2 + a_3^2}{2a_1^2 a_3^2} \left(\frac{\zeta_2}{\omega_2}\right) + \frac{(a_1^2 + a_3^2)^2}{a_1^2 a_3^2} = 0 \quad (5.74)$$

Ecuațiile (III.A.6) și (III.A.7) sunt în mod evident incompatibile dacă nu este satisfăcută egalitatea $a_1 = a_3$. Considerații similare ne vor conduce și la ecuațiile pentru raportul (ζ_3/ω_3) , unde $a_1 = a_2$. Prin urmare, putem afirma că există posibilitatea obținerii de soluții netriviiale numai dacă cel mult două dintre cele trei perechi (ζ_1, ω_1) , (ζ_2, ω_2) și (ζ_3, ω_3) sunt diferite de zero. Atunci putem enunța teorema lui Riemann :

Condiția de echilibru cere ca \mathcal{L} și \mathbf{L} să fie paraleli, în care caz ei vor fi orientați în lungul uneia dintre axele principale ale elipsoidului, sau să nu fie paraleli, în care caz se află într-unul din planele principale ale elipsoidului

Cele două condiții enunțate de Riemann vor conduce la tipuri de configurații esențial diferite. În primul caz apar configurații cu o singură pereche de componente (ζ_i, ω_i) diferite de zero, iar figurile de echilibru se vor numi *elipsoizi de tip S Riemann*, în timp ce în al doilea caz două perechi de componente (ζ_i, ω_i) sunt diferite de zero și vor apărea trei tipuri distincte cu structuri și proprietăți diferite.

În cele ce urmează ne vom concentra atenția asupra elipsoizilor de tip S Riemann când ζ și ω sunt paraleli cu una din axele principale, de exemplu x_3 , și $a_1 \geq a_2$. Atunci componentele mișcării interne (5.68) corespunzătoare vorticității $\zeta \equiv (0, 0, \zeta)$ sunt

$$u_1 = Q_1 x_2, \quad u_2 = Q_2 x_1, \quad u_3 = 0 \quad (5.75)$$

unde

$$Q_1 = -\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta, \quad Q_2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta \quad (5.76)$$

Considerând componentele diagonale ale ecuației de mișcare (III.A.16)

$$2\mathcal{T}_{11} + \omega^2 I_{11} + \mathcal{W}_{11} + 2\omega \int_V d\mathbf{r} \rho u_2 x_1 = 2\mathcal{T}_{22} + \omega^2 I_{22} + \mathcal{W}_{22} - 2\omega \int_V d\mathbf{r} \rho u_1 x_2 = \mathcal{W}_{33} \quad (5.77)$$

care în cazul mișcării specificate de (5.75) se rescriu

$$a_2^2 Q_1^2 + a_1^2 (\omega^2 + 2Q_2 \omega) - 2A_1 a_1^2 = a_1^2 Q_2^2 + a_2^2 (\omega^2 - 2Q_1 \omega) - 2A_2 a_2^2 = -2A_3 a_3^2 \quad (5.78)$$

din care rezultă că

$$\omega^2 - Q_1 Q_2 = 2B_{12} \quad (5.79)$$

$$\frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta \omega = a_1^2 a_2^2 A_{12} - a_3^2 A_3 \quad (5.80)$$

unde am folosit simbolii simetrici în indici

$$A_{ijk\dots} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)(a_j^2 + u)(a_k^2 + u)\dots} \quad (5.81)$$

$$B_{ijk\dots} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u du}{\Delta(a_i^2 + u)(a_j^2 + u)(a_k^2 + u)\dots} \quad (5.82)$$

unde $\Delta = [(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)]^{1/2}$.

Vom introduce în continuare noțiunea de *secvență Riemann* de-alungul căreia cantitatea definită mai jos este o constantă

$$f = \frac{\zeta}{\omega} \quad (5.83)$$

Coeficienții Q_i ($i = 1, 2, 3$) au următoarele expresii în funcție de f

$$Q_1 = -\frac{a_1^2 \omega}{a_1^2 + a_2^2}, \quad Q_2 = \frac{a_2^2 \omega}{a_1^2 + a_2^2} \quad (5.84)$$

Să considerăm în continuare mișcarea fluidului în SI (al laboratorului). Componentele lui \mathbf{U} sunt date cf. (5.23), (5.75) și (5.84) de

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 - \omega x_2 = -\omega \left(1 + \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} f \right) x_2 \\ U_2 &= u_2 + \omega x_1 = \omega \left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} f \right) x_1 \\ U_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

iar rotorul vitezei în sistemul inerțial va avea o singură componentă, în lungul axei x_3 care va fi dată de

$$\zeta = (\nabla \times \mathbf{U})_3 = (2 + f)\omega \quad (5.86)$$

Atunci, dacă $f = -2$, ζ și vom avea o *secvență Riemann irotațională*. Din ecuația (5.23), (5.75) și (5.84) vedem că dacă $f = 0$, $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, avem o secvență Jacobi care corespunde *secvenței Riemann de rotație rigidă*. Alternativ, dacă definim parametrul de rigiditate prin

$$r = 1 + \frac{f}{2} \quad (5.87)$$

vom avea cazul de rotație rigidă când $r = 1$ și cazul curgerii irotaționale când $r = 0$. Atunci (5.85) se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = (1 - r) \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \boldsymbol{\omega} \nabla(x_1 x_2) + r \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.88)$$

adică câmpul de viteze $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ poate fi scris ca o combinație convexă de contribuții rigidă

$$\mathbf{U}_{RR} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.89)$$

și irotațională

$$\mathbf{U}_{IF} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \boldsymbol{\omega} \nabla(x_1 x_2) \quad (5.90)$$

Momentul cinetic va fi dat de (5.64)

$$L = \frac{1}{5} M (a_1^2 + a_2^2) \boldsymbol{\omega} \left[1 + \frac{2a_1^2 a_2^2}{(a_1^2 + a_2^2)^2} f \right] = \frac{1}{5} \frac{M \boldsymbol{\omega}}{a_1^2 + a_2^2} \left[(a_1^2 - a_2^2)^2 + 4r a_1^2 a_2^2 \right] \quad (5.91)$$

iar circulația va fi dată de (5.67)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{5} M a_1 a_2 \boldsymbol{\omega} (2 + f) = \frac{2}{5} M a_1 a_2 \boldsymbol{\omega} r \quad (5.92)$$

Se observă că în cazul secvențelor Riemann irotaționale ($f = -2$ sau $r = 0$), circulația și respectiv vorticitatea se anulează. Cum $L = \mathcal{I}_r \boldsymbol{\omega}$, atunci putem scrie momentele de inerție în cele două cazuri limită ale secvenței Riemann

$$\mathcal{I}_{IF} = \frac{M}{5} \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad (5.93)$$

$$\mathcal{I}_{RR} = \frac{M}{5} (a_1^2 + a_2^2) = \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 (a_1^2 + a_2^2) \quad (5.94)$$

unde $\mathcal{I}_0 = \frac{2M}{5}$. Se mai poate arăta foarte simplu că momentul de inerție \mathcal{I}_r al rotatorului Riemann este la fel ca și câmpul de viteze (5.88), o combinație convexă a contribuțiilor rigidă \mathcal{I}_{RR} și irotațională \mathcal{I}_{IF}

$$\mathcal{I}_r = (1 - r) \mathcal{I}_{IF} + \mathcal{I}_{RR} \quad (5.95)$$

Rosensteel a arătat că relația (5.95) este echivalentă cu formula Inglis pentru momentul de inerție al unui oscilator anizotrop care se rotește în jurul axei z [Ros92b]

$$H_\omega = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + \frac{1}{2}M(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2) - \omega L \quad (5.96)$$

Pentru viteze unghiulare mici, termenul de cranking $-\omega L$ poate fi calculat în teoria perturbațiilor, $\Delta E = \frac{1}{2}\mathcal{I}_{Inglis}\omega^2 + \dots$, momentul de inerție Inglis fiind dat de [BM75]

$$\mathcal{I}_{Inglis} = \frac{\hbar}{2\omega_1\omega_2} \left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\omega_1 - \omega_2}(N_2 - N_1) + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 + \omega_2}(N_2 + N_1) \right] \quad (5.97)$$

unde

$$N_{1,2,3} = \sum_{\alpha=1}^A (n_{1,2,3} + \frac{1}{2})_\alpha \quad (5.98)$$

este numărul total de cuante pe axă.

În cazul deformărilor de echilibru, adică atunci când fluctuațiile densității sunt egale cu fluctuațiile potențialului de deformare (condiția de self - consistență)

$$\omega_1 N_1 = \omega_2 N_2 = \omega_3 N_3 \quad (5.99)$$

formula Inglis (5.97) va da momentul de inerție de rotație al corpului rigid

$$\mathcal{I}_{RR} = \langle \sum_{\alpha=1}^A M(x_1^2 + x_2^2)_i \rangle \quad (5.100)$$

iar în cazul în care este considerată configurația cu

$$N_1 = N_2 = N_3 \quad (5.101)$$

corespundă toare pă turilor umplute, obținem momentul de inerție al curgerii irotaționale

$$\mathcal{I}_{IF} = M \frac{\langle \sum_\alpha (x_1 - x_2)_\alpha \rangle^2}{\langle \sum_\alpha (x_1 + x_2)_\alpha \rangle^2} \quad (5.102)$$

unde distribuția anizotropă a densității poate fi caracterizată de valoarea pătratică medie

$$\langle \sum_\alpha (x_{1,2,3}^2)_\alpha \rangle = \frac{\hbar}{M\omega_{1,2,3}} N_{1,2,3} \quad (5.103)$$

Se poate atunci arăta că parametrul de rigiditate este legat de parametrii potențialului oscilatorului anizotrop prin

$$r^2 = \frac{N_2/N_1 - N_1/N_2}{\omega_1/\omega_2 - \omega_1/\omega_2} \quad (5.104)$$

Dacă însă renunțăm la condiția (5.101), atunci cu Hamiltonianul (5.96) nu putem obține decât moment de inerție rigid \mathcal{I}_{RR} . Pentru a obține momentele de inerție intermediare cu condiția de self - consistență (5.99), trebuie adăugat în Hamiltonianul (5.96) un nou termen de cranking, și anume $\lambda\mathcal{L}$ [Ros92c]. Când $\lambda \neq 0$, condiția de self - consistență (5.99) implică că momentul de inerție al rotatorului Riemann este o interpolare între momentele de inerție ale rotatorului rigid și a curgerii irotaționale. În mecanica cuantică, momentul cinetic și circulația vor avea următoarea formă

$$\hat{L} = -i\hbar \sum_{\alpha=1}^A \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{\alpha} \quad (5.105)$$

$$\hat{\mathcal{L}} = -i\hbar \sum_{\alpha=1}^A \left(\frac{a_2}{a_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{a_1}{a_2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{\alpha} \quad (5.106)$$

Prin urmare operatorul $\exp(-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}/\hbar)$ generează rotații finite ale sistemului nuclear cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ în raport cu sistemul laboratorului (SI), în timp ce operatorul $\exp(i\lambda\mathcal{L}/\hbar)$ generează un vârtej al fluidului nuclear în raport cu sistemul intrinsec (SM) cu viteza vorticală $\boldsymbol{\lambda}$.

5.3 Structura electromagnetică a excitațiilor 2^+ , 4^+ în modelul rotațional Riemann

Așa cum am arătat în secțiunile precedente, modelul rotatorului Riemann prezice un câmp de viteze, care este o combinație liniară a contribuțiilor rigidă și irotațională (5.88) spre deosebire de modelul picăturii de lichid care furnizează un câmp de viteze pur irotațional și modelul rotatorului adiabatic care este asociat cu mișcări de rotație rigidă. Cum toate aceste modele dau descrieri diferite ale distribuției curenților colectivi, apare ca necesară o determinare directă a curentului nuclear. Pentru aceasta, împrăștierea electron - nucleu este un instrument foarte util, deoarece permite, în principiu, măsurarea multipolilor densității de curent electromagnetic, în interiorul benzii fundamentale [Moy86], [BSMNS88], [SGSMB89]. Am văzut în anexa II.B, că multipolii Coulombieni sunt asociați distribuției de sarcină a nucleului, și deci pentru a obține cantitățile care depind de curentul nuclear trebuie să măsurăm partea transversală a secțiunii de ciocnire, adică multipolii electrici și magnetici.

Există o cantitate foarte mare de date în legătură cu calculul teoretic și determinarea experimentală a multipolilor electromagnetici pentru reacțiile (e, e') , $(e, e'\gamma)$, $(e, e'p)$, etc. Scopul acestei lucrări fiind acela de a pune în evidență multipolii toroidali care sunt

activi în astfel de procese, ne vom concentra în continuare asupra investigării multipolilor transversali electrici care apar în parametrizarea multipolară a lui Dubovik și Ceșkov. Vom arăta că în anumite condiții de electroexcitare a benzii fundamentale a unui nucleu par - par, contribuțiile toroidale la secțiunea diferențială pot deveni importante.

Vom considera așadar un nucleu par - par a cărui suprafață efectuează oscilații armonice și care simultan se poate roti rigid în jurul unei axe perpendiculare pe axa sa de simetrie. În acest caz pare justificat să adoptăm pentru curentul nuclear corespunzător stării fundamentale, ansatzul dat de modelul Riemann.

Observând că factorul care ponderează contribuția irotatională din (5.88) este egal cu rădăcina pătratică a raportului momentelor de inerție IF (5.93) și RR (5.94)

$$\sqrt{\frac{\mathcal{I}_{IF}}{\mathcal{I}_{RR}}} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}$$

vom rescrie (5.90) sub forma

$$\mathbf{U}_{IF} = \sqrt{\frac{\mathcal{I}_{IF}}{\mathcal{I}_{RR}}} \omega \nabla(x_1 x_2) \quad (5.107)$$

Apoi exprimând vitezele \mathbf{U}_{IF} și \mathbf{U}_{RR} ca tensori sferici de rangul doi și respectiv unu, obținem componenta sferică μ a vitezei totale

$$U_{1\mu}(\mathbf{r}) = (1 - r) [V_2 \otimes r_1]_{1\mu} + r [V_1 \otimes r_1]_{1\mu} \quad (5.108)$$

unde $\mathbf{U} = \sum (-)^{\mu} U_{-\mu} \boldsymbol{\xi}_{\mu}$ [VMH75], iar componentele sferice ale tensorilor care se cuplează cu $r_{\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{1\mu}$ sunt date de

$$V_{1\mu} = -i\sqrt{2}\omega_{\mu}, \quad V_{2\mu} = i\sqrt{\frac{10}{3}} \frac{\mathcal{I}_{IF}}{\mathcal{I}_{RR}} \mu \omega_{\mu} \quad (5.109)$$

cu $\mu = \pm 1$, $\omega_{\mu} = -\frac{\mu\omega}{\sqrt{2}}$.

Densitatea de curent va fi

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \rho^p(\mathbf{r}) \mathbf{U}(\mathbf{r}) \quad (5.110)$$

unde

$$\rho^p = \sum_{L \geq 2} \rho_L^p(\mathbf{r}) Y_{L0}(\theta, \phi) \quad (5.111)$$

este densitatea de sarcină protonică dezvoltată după componentele multipolare pare ($L = 2, 4, \dots$) pentru un nucleu deformat axial simetric.

Vom calcula multipolii transversal electric și longitudinal conform (II.B.28) și (3.79). Cum acești multipoli depind liniar de curent, ei vor fi niște combinații convexe ale termenilor IF și RR. Folosind identitatea de mai jos, care implică armonicile vectoriale

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_{\lambda\lambda'}^\mu(\theta, \phi) \cdot [V_k \otimes r_1] \\ &= \sum_L \sqrt{3} \hat{L} \hat{\lambda} \hat{\lambda}' \begin{pmatrix} \lambda' & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & k \\ 1 & 1 & L \end{Bmatrix} \sum_{\nu M} (-)^{\mu+k} \begin{pmatrix} k & \lambda & L \\ \nu & -\mu & -M \end{pmatrix} r Y_{L-M} V_{k\nu} \end{aligned} \quad (5.112)$$

vom putea exprima multipolii transversal electric și longitudinal sub forma [Ros90]

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\lambda\mu}^{el}(q) &= \frac{i^{\lambda+1}}{\sqrt{2\lambda+1}} \sum_{\lambda'L} (\sqrt{\lambda+1} \delta_{\lambda'\lambda-1} - \sqrt{\lambda} \delta_{\lambda'\lambda+1}) \times \\ & \int_0^\infty r^3 dr j_{\lambda'}(qr) \rho_L^p(r) \sqrt{3} \hat{L} \hat{\lambda} \hat{\lambda}' \begin{pmatrix} \lambda' & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & k \\ 1 & 1 & L \end{Bmatrix} (-)^{\mu+k} \begin{pmatrix} k & \lambda & L \\ \mu & -\mu & -M \end{pmatrix} V_{k\mu} \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\lambda\mu}(q) &= \frac{i^{\lambda+1}}{\sqrt{2\lambda+1}} \sum_{\lambda'L} (\sqrt{\lambda} \delta_{\lambda'\lambda+1} + \sqrt{\lambda+1} \delta_{\lambda'\lambda-1}) \times \\ & \int_0^\infty r^3 dr j_{\lambda'}(qr) \rho_L^p(r) \sqrt{3} \hat{L} \hat{\lambda} \hat{\lambda}' \begin{pmatrix} \lambda' & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda' & k \\ 1 & 1 & L \end{Bmatrix} (-)^{\mu+k} \begin{pmatrix} k & \lambda & L \\ \mu & -\mu & -M \end{pmatrix} V_{k\mu} \end{aligned} \quad (5.114)$$

Particularizând mai întâi la cazul rotatorului rigid vom lua $k = 1$ și o deformare statică cuadripolară în (5.111) $L = 2$, axial simetrică : $\beta = \beta_2 \neq 0$, $\gamma = 0$

$$\rho^p(\mathbf{r}) = \frac{3eZ}{4\pi R_0^3} \Theta [R_0(1 + \beta Y_{20}) - r] \quad (5.115)$$

și deci

$$\rho_2^p(r) = \int d\Omega Y_{20}^*(\theta, \phi) \rho^p(\mathbf{r}) = \frac{3eZ\beta}{4\pi R_0^2} \delta(R_0 - r) \quad (5.116)$$

obținem în loc de (5.113) și (5.114)

$$\hat{T}_{2\mu}^{el}(q, \text{RR}) = -Ze\sqrt{3}\pi \frac{\sqrt{30} Q_0}{40 R_0} \left[j_1(qR_0) - \frac{2}{3} j_3(qR_0) \right] \mu \omega_\mu \quad (5.117)$$

$$\hat{L}_{2\mu}(q, \text{RR}) = -Ze\sqrt{3}\pi \frac{\sqrt{30} Q_0}{40} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Q_0}{R_0} [j_1(qR_0) + j_3(qR_0)] \mu \omega_\mu \quad (5.118)$$

Pentru curgerea irotatională $k = 2$ vom considera o distribuție a densității de sarcină deformată careia îi corespunde componenta monopolară

$$\rho_0^p(r) = \frac{3eZ}{\sqrt{4\pi} R_0^2} \Theta(R_0 - r) \quad (5.119)$$

iar multipolii (5.113) și (5.114) se vor rescrie în acest caz

$$\hat{T}_{2\mu}^{el}(q, \text{IF}) = -Ze\sqrt{3}\pi \frac{\sqrt{30}}{40} \frac{Q_0}{R_0} [j_1(qR_0) + j_3(qR_0)] \mu\omega_\mu \quad (5.120)$$

$$\hat{L}_{2\mu}(q, \text{IF}) = \hat{L}_{2\mu}(q, \text{RR}) \quad (5.121)$$

Folosind proprietatea de convexitate a câmpului de viteze (5.88) și deci și a multipolilor electromagnetici vom scrie expresiile acestora pentru o valoare oarecare a parametrului de rigiditate

$$\hat{T}_{2\mu}^{el}(q, r) = -Ze\sqrt{3}\pi \frac{\sqrt{30}}{40} \frac{Q_0}{R_0} \left[j_1(qR_0) - \left(1 - \frac{5}{3}r\right) j_3(qR_0) \right] \mu\omega_\mu \quad (5.122)$$

$$\hat{L}_{2\mu}(q, r) = -Ze\sqrt{3}\pi \frac{\sqrt{30}}{40} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Q_0}{R_0} [j_1(qR_0) + j_3(qR_0)] \mu\omega_\mu \quad (5.123)$$

unde $-Ze$ este sarcina protonică, $Q_0 = \sqrt{\frac{3}{5\pi}} R_0^2 \beta$ momentul cuadrupolar static, iar $R_0 = r_0 A^{1/3}$.

Formulele de mai sus ne vor permite o primă remarcă, foarte importantă, și anume că multipolii longitudinali nu depind de parametrul de rigiditate și sunt proporționali cu multipolii transversali electrici în limita IF când $r = 0$ (cf.(5.121))

$$\hat{L}_{2\mu}(q, r) = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{T}_{2\mu}^{el}(q, r = 0) \quad (5.124)$$

Deci multipolii longitudinali sunt insensibili la componentele rotaționale ale câmpului de viteze, din moment ce valoarea lor este constantă pentru orice valoare a lui r .

În următoarea etapă a acestei secțiuni ne vom interesa de comportamentul la transferuri de impuls mici, ale multipolilor în discuție.

În 1937, Siegert a arătat că folosind legea de conservare a sarcinii și curentului în aproximația lungimilor de undă mari, este posibilă înlocuirea operatorului densitate de curent din expresia multipolului transversal cu rata de variație în timp a operatorului densitate de sarcină [Sa53], [Ro55], [EG70b]. Acest rezultat este foarte util deoarece ne permite să eliminăm complicațiile tehnice legate de de structura operatorului curent atunci când evaluăm ratele de tranziție electromagnetice într-un anumit model nuclear. Astfel, corecțiile legate de schimbul de mezozi între nucleoni pot fi neglijate pentru transferuri de impuls mici. Exprimarea cantitativă a acestei teoreme este următoarea

$$\langle I_f \parallel \hat{T}_\lambda^{el}(q \rightarrow 0) \parallel I_i \rangle = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \langle I_f \parallel \hat{L}_\lambda(q \rightarrow 0) \parallel I_i \rangle \quad (5.125)$$

adică în limita lungimilor de undă mari e.m.r. ale factorului de formă transversal electric este proporțional cu cel longitudinal, independent de aproximația sau modelul folosit pentru curentul nuclear. Ecuația (5.124) este echivalentă cu (5.125), dar pentru transfer arbitrar de impuls, nu numai în limita lungimilor de undă mari. Cu alte cuvinte în cazul secvenței Riemann irotațională, $r = 0$, teorema lui Siegert, exprimată cantitativ prin (5.125) este valabilă în orice ordin a lui q . Aceasta înseamnă că, în principiu, reacțiile efectuate la transferuri de impuls q - joase nu sunt capabile să dea informații despre vorticitate. Rotatorul Riemann se comportă ca o picătură de lichid irotațională la transferuri de impuls joase. Din punctul de vedere al parametrizării multipolare, adoptat în lucrare, acest fapt poate fi înțeles dacă invocăm următorul argument : în limita q - mic

$$\langle I_f \parallel \hat{L}_\lambda(q \rightarrow 0) \parallel I_i \rangle = -\frac{iq}{15} \langle I_f \parallel \dot{\hat{Q}}_\lambda(q \rightarrow 0) \parallel I_i \rangle \quad (5.126)$$

unde operatorul moment cuadripolar al sarcinii are expresia binecunoscută

$$\hat{Q}_{2\mu} = \int d\mathbf{r} r^\lambda Y_\lambda(\theta, \phi) \hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (5.127)$$

Folosind legea de conservare a sarcinii și curentului, derivata temporală a operatorului cuadripolar de sarcină se poate pune sub forma

$$\dot{\hat{Q}}_{2\mu} = \int d\mathbf{r} r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) \quad (5.128)$$

Cum aplicarea operatorului gradient va duce la eliminarea componentelor rotaționale (vorticiale) ale curentului nuclear, derivata în raport cu timpul a momentului cuadripolar de sarcină va fi o caracteristică multipolară care este asociată curgerilor cuadripolare libere de rotații, adică $\nabla \times \mathbf{J} = 0$, cum sunt de exemplu vibrațiile β și γ . Acesta este motivul pentru care răspunsul nuclear este de tip vibratoriu, fără componente de forfecare, pentru transferuri de impuls mici.

În consecință, pentru a obține informații despre curenții rotaționali din interiorul nucleului, trebuie să investigăm structurile electromagnetice care sunt neglijate prin aplicarea teoremei lui Siegert. Pentru a merge peste constrângerile impuse de această teoremă, trebuie să mărim energia transferată în reacția de împrăștiere. Așa cum am arătat și în capitolul I.A al acestei lucrări, termenii de ordin superior din dezvoltarea după puterile lui q^2 a multipolului transversal electric sunt liberi de constrângerea impusă de legea continuității. Prin urmare acești termeni sunt susceptibili de a oferi date despre componentele vorticiale ale curentului, adică pentru care $\nabla \times \mathbf{J} \neq 0$. Pentru aceasta vom aplica parametrizarea Dubovik - Ceșkov pentru multipolii transversali electrici, în care termenul

Figura 5.2: Deviația de la teorema lui Siegert pentru nucleul ^{166}Er în cazul excitațiilor $0^+ \rightarrow 2^+$ ($\lambda = 2$) și $0^+ \rightarrow 4^+$ ($\lambda = 4$) considerând cazul IF și RR.

limită Siegert este decuplat explicit de termenii de ordin superior în puterile lui q^2 ²

$$\hat{T}_{2\mu}^{el}(q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{L}_{2\mu}^{el} + q^2 \hat{T}_{2\mu}^{tor}(q) \quad (5.129)$$

Vom defini o cantitate care să țină cont de devierea de la teorema lui Siegert, adică să arate importanța multipolilor toroidali [Mi94a]

$$\eta_2(q) = q^2 \frac{\langle I_f \parallel \hat{T}_2^{tor}(q) \parallel I_i \rangle}{\langle I_f \parallel \hat{T}_2^{el}(0) \parallel I_i \rangle} \quad (5.130)$$

și atunci (5.129) se poate rescrie, factorizând multipolul longitudinal în punctul $q = 0$

$$\langle I_f \parallel \hat{T}_2^{el}(q) \parallel I_i \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \langle I_f \parallel \hat{L}_2(0) \parallel I_i \rangle (1 - \eta_2(q)) \quad (5.131)$$

În cazul particular al IF și RR funcția η_2 are aspectul

$$\eta_2(q, \text{IF}) = \frac{15}{(qR_0^2)^5} \left[(3 - (qR_0)^2) \sin qR_0 - 3qR_0 \cos qR_0 \right] - 1 \quad (5.132)$$

$$\eta_2(q, \text{RR}) = \frac{15}{(qR_0^2)^6} \left[((qR_0)^2 - 2) \sin qR_0 + \left(2 - \frac{(qR_0)^2}{3} \right) qR_0 \cos qR_0 \right] - 1 \quad (5.133)$$

²conform ecuației (2.25)

iar în cazul intermediar, această funcție va putea fi exprimată , deasemenea ca o combinație a contribuțiilor IF și RR [Mi95]

$$\eta_2(q, r) = q^2 \frac{\langle I_f \parallel \hat{T}_2^{tor}(q, r) \parallel I_i \rangle}{\langle I_f \parallel \hat{T}_2^{el}(0) \parallel I_i \rangle} = (1 - r)\eta_2(q, r = 0) + r\eta_2(q, r = 1) \quad (5.134)$$

În fig.(6.2) am reprezentat grafic această cantitate în funcție de transferul de impuls q . Se observă că modelul RR prezintă o deviație mai mare de la valabilitatea teoremei lui Siegert decât modelul IF. În cazul hexadecupolar ($\lambda = 4$) efectul de deviație este mai mic decât în cazul cuadripolar ($\lambda = 2$) pentru ambele modele.

O altă cantitate de interes este factorul de formă transversal electric real [Ub71]

$$\mathcal{F}_\lambda^{el}(q) \equiv \frac{\langle I_f \parallel \hat{T}_\lambda^{el}(q) \parallel I_i \rangle}{\langle I_f \parallel \hat{T}_\lambda^{el}(0) \parallel I_i \rangle} \quad (5.135)$$

cu $\mathcal{F}_\lambda^{el}(0) = 1$, adică factorul de formă definit în (3.71), normat în punctul $q = 0$. Particularizând la cazul rotatorului Riemann, efectuând procedura de separare Dubovik - Ceškov și folosind definiția momentului toroidal (2.27), obținem în primul ordin a lui q^2

$$\mathcal{F}_2^{el}(q) \approx 1 - \frac{q^2}{3} \mathcal{I} \frac{\mathcal{T}_2}{Q_2} \quad (5.136)$$

unde \mathcal{I}_r este momentul de inerție al rotatorului Riemann (5.95), și $Q_2 = 3e^2 Z R_0^2 \beta / 4\pi$ este e.m.r. al operatorului moment cuadripolar de tranziție al distribuției de sarcină, care nu depinde de rigiditate. Relația (5.136) ne va permite determinarea momentului toroidal cuadripolar de tranziție \mathcal{T}_2 în același mod în care se determină raza pătratică medie de sarcină (magnetică) $\langle r^2 \rangle_{C(mag)}$, adică prin calculul pantei lui $\mathcal{F}_2^{el}(q)$. În virtutea ecuației (5.131) și a definiției factorului de formă real (5.136), momentul toroidal cuadripolar, pentru o valoare arbitrară a parametrului de rigiditate, se scrie [Mi95]

$$\mathcal{T}_2(r) = \frac{3e^2 Z}{56\pi} \frac{3 + 2r}{\mathcal{I}_r} R_0^4 \beta \quad (5.137)$$

Valori ale acestui moment de tranziție, pentru diferite nuclee și parametri de rigiditate, sunt date în tabelul(5.1)

Am reprezentat deasemenea grafic \mathcal{T}_2 în funcție de rigiditate pentru nucleele ^{152}Sm și ^{166}Er în fig.(5.3). O concluzie foarte importantă care se desprinde din dependența lui \mathcal{T}_2 de r este aceea că momentul toroidal cuadripolar crește drastic la valori apropiate de 1 a lui r , fiind cu două ordine de mărime mai mare în cazul RR decât în cazul IF. Prin urmare pentru nuclee care prezintă componente vorticiuale puternice ale câmpului de curenți, tranzițiile toroidale cuadripolare sunt mult mai intense decât la nucleele vibratorii.

Nucleu	β	r	\mathcal{T}_2
^{152}Sm	0.246	0.	$5.2 \cdot 10^{-4}$
		0.5	$1.32 \cdot 10^{-3}$
		1.	$1.72 \cdot 10^{-2}$
^{154}Sm	0.27	0.	$5.6 \cdot 10^{-4}$
		0.5	$1.42 \cdot 10^{-3}$
		1.	$1.56 \cdot 10^{-2}$
^{166}Er	0.287	0.	$5.2 \cdot 10^{-4}$
		0.5	$1.59 \cdot 10^{-3}$
		1.	$1.52 \cdot 10^{-2}$

Tabela 5.1: Momentul toroidal cuadrupolar de tranziție \mathcal{T}_2 în unități arbitrare la o deformare β fixată pentru nucleele ^{152}Sm , ^{154}Sm și ^{166}Er pentru trei valori diferite ale parametrului de rigiditate r : **IF** ($r = 0$), **RR** ($r = 1$) și rotatorul Riemann cu $r = 0.5$.

Având în vedere definiția multipolilor toroidali, măsurarea lor este echivalentă cu măsurarea multipolului transversal electric la transfer de impuls mare și, apoi, eliminarea limitei Siegert. Așa cum am spus mai devreme, reacțiile de împrăștiere inelastică a electronilor pe nuclee permit măsurarea factorilor de formă, la transferuri de impuls situate între punctul fonic și $qR \gg 1$. Este deci posibil să obținem informații despre factorii de formă transversali pentru acele valori ale lui q pentru care constrângerile impuse de legea de conservare a sarcinii și curentului sunt importante până la acel domeniu de valori ale lui q la care teorema lui Siegert își pierde valabilitatea, iar factorii de formă toroidali, vor domina partea transversal electrică a secțiunii diferențiale.

În cazul excitării benzii fundamentale a unui nucleu par - par, vor fi implicați în tranziție multipolii electrici cu $\lambda = 2, 4, \dots$ și multipolii magnetici cu $\lambda = 1, 3, \dots$. În această expunere nu vom considera multipolii magnetici și ne vom mărgini să analizăm doar părțile longitudinală și transversal electrică ale secțiunii diferențiale. Având în vedere interesul expunerii noastre, care constă în determinarea tranzițiilor toroidale în legătură cu observarea curenților vorticiali nucleari, vom alege o metodă convenabilă pentru a separa componentele longitudinale dominante din secțiunea diferențială și astfel să obținem multipolii transversali.

Metoda de separare a multipolilor transversali la unghiuri de împrăștiere de 180° este

Figura 5.3: *Dependența momentului toroidal cuadrupolar de tranziție de parametrul de rigiditate, pentru ^{152}Sm (linia plină) și ^{166}Er (linia punctată).*

foarte seducătoare din moment ce la astfel de unghiuri, multipolii transversali domină secțiunea diferențială. O altă metodă de separare a multipolilor transversali de cei longitudinali, care constă în împrăștierea de electroni electroni polarizați, va fi discutată în secțiunea următoare.

Pentru excitarea $0^+ \rightarrow \lambda^+$, rezultă în conformitate cu (II.B.34) următoarea expresie pentru secțiunea diferențială

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{(e,e')} = \frac{4\pi\sigma_{Mott}}{f_{rec}^{-1}} \left\{ \frac{q_\mu^4}{q^4} |\langle \lambda^+ \parallel \hat{M}_\lambda(q) \parallel 0^+ \rangle|^2 + \left(\frac{q_\mu^2}{2q^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) |\langle \lambda \parallel \hat{T}_\lambda^{el}(q) \parallel 0^+ \rangle|^2 \right\} \quad (5.138)$$

Folosind descompunerea Dubovik - Ceșkov, care separă multipolii toroidali, și neglijând în expresia de mai sus a secțiunii diferențiale multipolii Coulomb și limita pentru q - mic a multipolului transversal electric, obținem

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{(e,e')} = 4\pi\sigma_{Mott} f_{rec}^{-1} q^2 \left(\frac{q_\mu^2}{2q^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) |\langle \lambda \parallel \hat{T}_\lambda^{tor}(q) \parallel 0^+ \rangle|^2 \quad (5.139)$$

Această aproximație este echivalentă cu neglijarea momentelor de tranziție ale sarcinii Q_λ și ale razelor pătratice medii ale distribuției de sarcină r_λ^{2n} .

Secțiunile diferențiale (5.138) și (5.139) sunt reprezentate grafic în ambele cazuri, pentru RR și IF, în scopul de face o comparație între formula exactă și cea aproximativă, în

Figura 5.4: *Secțiunea diferențială de retroîmprăștiere ($\theta = 180^0$) pentru electroexcitarea stării $I_f = 2$ a IF și RR. Pentru fiecare model au fost reprezentate două seturi de date : primul include factorii de formă Coulombieni și transversal electric ; al doilea folosește aproximația toroidală.*

procese de retroîmprăștiere.

În fig.(5.4) am reprezentat secțiunea corespunzătoare tranziției cuadrupolare, iar în fig.(5.5) cea pentru tranziția hexadecupolară indusă de electronul împrăștiat. Devine clar din studiul acestor grafice că aproximația enunțată mai sus, este acceptabilă pentru modelul RR la transferuri de impuls joase și înalte atât pentru tranzițiile cuadrupolare cât și pentru cele hexadecupolare. Diferența principală constă în localizarea minimelor de difracție, care sunt micșorate în cazul aproximativ față de cel exact. Aceste diferențe nu sunt importante, deoarece, într-o analiză de salt de fază, curba din vecinătatea minimelor este netezită.

În cazul IF, concordanța dintre secțiunea diferențială exactă (5.138) și cea aproximativă (5.139) este bună pentru $q < 400$ MeV/c pentru $\lambda = 2$ și $q < 250$ MeV/c pentru $\lambda = 4$ în cazul nucleului ^{166}Er . Cauza care determină aceste discrepanțe pentru modelul IF între curbele exactă și aproximativă trebuie să fie pusă pe seama faptului că la transferuri de impuls mari se mărește considerabil contribuția razelor pătratice medii ale distribuției

Figura 5.5: *Acela si lucru ca și în figura precedentă, dar pentru $I_f = 4$.*

de sarcină.

6

Separarea factorului de formă toroidal în procese de coincidență $(e, e'\gamma)$

Așa cum am văzut în capitolele anterioare, în studiul împrăștiilor de electroni nepolarizați, putem separa efectele longitudinale de cele transversale efectuând așa numita decompunere Rosenbluth asupra secțiunii diferențiale (II.B.34), adică să folosim dependența explicită de unghiul de împrăștiere θ al electronului. Am subliniat că de obicei partea transversală este mult mai mică în valoare absolută decât cea longitudinală, sau invers, cum este cazul retroîmprăștiilor, și prin urmare, procedura care încearcă separarea pătratului unei cantități mici (F_T^2) de pătratul unei cantități mari (F_L^2) este foarte dificilă de realizat în practică. Apare atunci ca necesară, găsirea acelor observabile din procesele de împrăștiere de electroni pe nuclee, altele decât (e, e') , care implică *interferențe* între efectele longitudinale și cele transversale.

O metodă care permite obținerea de informații despre interferențele longitudinal/transversal (L/T) este studiul reacțiilor de împrăștiere a electronilor în care apar grade de libertate de polarizare. Astfel de reacții sunt acelea în care sunt implicați electronii polarizați și țintele nucleare polarizate, sau reacții în care se măsoară o polarizare a stării finale. De exemplu în procesul de împrăștiere inclusivă¹ a unui electron pe un nucleu polarizat, apar funcții de răspuns adiționale care conțin interferențe între diferitele multipolarități [DoRa86], [RaDo89]. În aceste reacții se pot efectua separări ale unui set extins de observabile prin varierea orientării polarizării nucleului țintă.

¹prin *inclusive* vom înțelege acele reacții în care nu se produc particule sau cuante în starea finală, altele decât cele existente în starea inițială

Figura 6.1: *Varibilele cinematice folosite în descrierea reacției $(e, e'\gamma)$.*

O metodă alternativă constă în excitarea prin împrăștiere inelastică urmată de emisia gamma, adică reacția $(e, e'\gamma)$. Prin măsurarea distribuției unghiulare a fotonului emis se măsoară de fapt orientarea polarizării stării nucleare excitate. Principala problemă care apare în reacțiile $(e, e'\gamma)$ constă în faptul că dezintegrarea γ este un proces cu transfer de impuls mic și care se desfășoară predominant prin multipolii cei mai mici. Acest fapt va avea ca urmare, o limitare a numărului de funcții de răspuns care pot fi separate [DoRaD87], [RSWPW87].

Reacția $(e, e'\gamma)$ este un caz special al clasei de procese de împrăștiere a electronilor în coincidență, pur electromagnetice, $(e, e'x)$ unde x (ejectionul) poate fi un proton, neutron, deuteron, pion sau foton [KW83]. În analiza acestor reacții se arată că secțiunea dublu-diferențială (6.1) ia o formă analoagă cu cea Rosenbluth (II.B.34) dar în care apar funcții de răspuns adiționale multiplicare prin factorii cinematici care depind de unghiul azimutal al ejectionului ϕ , măsurat în raport cu planul de împrăștiere definit de electronii incidenți și emergenți, ca în fig.(6.1)

Aceste funcții de răspuns adiționale conțin interferențe între diverșii multipoli și sunt generalizări ale cantităților $|F_L|^2$ și $|F_T|^2$, care intră în expresia secțiunii diferențiale Rosenbluth. Aceste funcții noi pot fi izolate prin efectuarea unei *super-separări Rosenbluth*, adică prin varierea nu numai a unghiului de împrăștiere a electronului θ , dar și a

direcției ejectilului.

În cazul în care apar hadroni în starea finală, vor exista dificultăți ca urmare a faptului că interacția tare a ejectilului cu nucleul rezidual va influența reacția. Este vorba despre așa numitele *interacții în starea finală* (final state interactions) [Cab90]. În cazul reacției ($e, e'\gamma$), fotonul γ nefiind o particulă în interacție tare, nu vor apărea dificultățile specifice celorlalte reacții ($e, e'x$). Totuși va apărea o limitare severă: canalul de dezintegrare - γ trebuie să fie competitiv cu celelalte moduri de dezintegrare, pentru ca măsurătorile să devină practice. Acest lucru este posibil pentru stări din spectrul discret. Pentru stări aflate deasupra pragului de emisie de particule, emisia de nucleoni va domina asupra emisieii gamma cu câteva ordine de mărime, iar secțiunile ($e, e'\gamma$) vor fi în general prea mici pentru a fi măsurate, excepție făcând cazul în care reacția se produce prin intermediul unei rezonanțe gigant.

6.1 Studiul curenților în reacții ($e, e'\gamma$)

Ideile sumarizate în introducerea acestui capitol își găsesc aplicația și în studiul curenților electromagnetici în excitațiile colective ale nucleelor. Astfel, după cum am mai spus, în electroexcitarea stărilor din banda fundamentală rotațională a unui nucleu deformat par - par ($0^+, 2^+, 4^+, \dots$), multipolii longitudinali asociați tranziției (C2, C4, ...) sunt mult mai mari decât cei transversali electrici (E2, E4, ...). Nucleele par - pare nu pot fi făcute ținte polarizate, deoarece, având spin și paritate 0^+ în starea fundamentală nu se polarizează. În schimb, sunt candidați favoriți pentru studiul ($e, e'\gamma$), unde, așa cum am arătat mai devreme, efectele de interferență L/T pot fi izolate și astfel se pot determina elementele de matrice ale multipolului transversal electric.

În studiul [GDM90] asupra electroexcitării unei stări nucleare discrete, urmate de emisia unui foton real, detectat în coincidență cu electronul împrăștiat, se arată că secțiunea diferențială a procesului poate fi pusă sub forma

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega_e d\Omega_\gamma} \right)^{h,\sigma} = \frac{1}{2} \Sigma_0^{\lambda^+ 0^+} \left(\frac{\Gamma_\gamma^{\lambda^+ \rightarrow (\lambda-2)^+}}{\Gamma_{total}^{\lambda^+}} \right) (W_\Sigma(\theta_\gamma, \phi_\gamma) + h\sigma W_\Delta(\theta_\gamma, \phi_\gamma)) \quad (6.1)$$

unde $\Sigma_0^{\lambda^+ 0^+}$ este secțiunea diferențială a procesului (e, e') corespunzător, dat de ecuația (II.B.34), $\Gamma_\gamma^{\lambda^+ \rightarrow (\lambda-2)^+}$ este lărgimea energetică de fotodezintegrare pentru tranziția $\lambda^+ \rightarrow (\lambda-2)^+$ iar $\Gamma_{total}^{\lambda^+}$ este lărgimea energetică de dezintegrare totală pentru starea λ^+ . Raportul acestor două lărgimi care trebuie să varieze între 0 și 1 este de obicei de ordinul unității. Secțiunea diferențială este indexată după elicitatea electronului incident, $h = \pm 1$, și de

polarizarea circulară a fotonului detectat în coincidență $\sigma = \pm 1$. Funcțiile de distribuție unghiulară polarizate sunt normalizate la unitate ($\int d\Omega_\gamma W_\Sigma = 1$), satisfac condiția integrală ($\int d\Omega_\gamma W_\Delta = 0$) și se pot pune sub forma

$$W_\Sigma(\theta_\gamma, \phi_\gamma) = \frac{1}{4\pi} (1 + A_\Sigma(\theta_\gamma, \phi_\gamma)) \quad (6.2)$$

$$W_\Delta(\theta_\gamma, \phi_\gamma) = \frac{1}{4\pi} A_\Delta(\theta_\gamma, \phi_\gamma) \quad (6.3)$$

Introducând raportul între multipolul transversal și cel Coulombian

$$\xi_\lambda = \frac{\langle I_f \parallel \hat{T}_\lambda^{el} \parallel I_i \rangle}{\langle I_f \parallel \hat{M}_\lambda^{el} \parallel I_i \rangle} \quad (6.4)$$

și considerând $\xi_\lambda \ll 1$, este suficient să luăm în considerare de acum încolo termenii liniari în ξ_λ în funcția de distribuție unghiulară. Atunci funcțiile A_Σ și A_Δ care apar în (6.2) și (6.3) se vor scrie sub forma

$$A_\Sigma \approx G_L + \frac{\xi_\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \frac{\cos \phi_\gamma}{\cos \frac{1}{2}\theta_e} \frac{d}{d\theta_\gamma} G_L = G_L(\theta_\gamma + \delta) \quad (6.5)$$

$$A_\Delta \approx -\xi_\lambda \cos \phi_\gamma \tan \frac{1}{2}\theta_e \sin \theta_\gamma \frac{5}{4} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \frac{\lambda-2+3(\lambda+2)\cos^2 \theta_\gamma}{2\lambda-1} \quad (6.6)$$

cu

$$\delta = \frac{\xi_\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \frac{\cos \phi_\gamma}{\cos \frac{1}{2}\theta_e} \quad (6.7)$$

G - urile sunt următoarele combinații de polinoame Legendre

$$G_L = \frac{\lambda+1}{7(2\lambda-1)} \left\{ 5P_2(\cos \theta_\gamma) - 3 \left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-3} \right) P_4(\cos \theta_\gamma) \right\} \quad (6.8)$$

$$G_{TL} = \frac{\sqrt{2}}{7(2\lambda-1)} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \left\{ 5P_2^1(\cos \theta_\gamma) - 3 \left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-3} \right) P_4^1(\cos \theta_\gamma) \right\} \quad (6.9)$$

$$G_T = -\frac{1}{7(2\lambda-1)2\lambda} \times \left\{ 5(6-2\lambda(\lambda+1))P_2(\cos \theta_\gamma) - 3 \left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-3} \right) (20-2\lambda(\lambda+1))P_4(\cos \theta_\gamma) \right\} \quad (6.10)$$

$$G_{TT} = -\frac{\lambda+1}{28(2\lambda-1)} \left\{ 5P_2^2(\cos \theta_\gamma) - \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-3} \right) P_4^2(\cos \theta_\gamma) \right\} \quad (6.11)$$

$$G_{TL'} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \left\{ P_1^1(\cos \theta_\gamma) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-1} \right) P_3^1(\cos \theta_\gamma) \right\} \quad (6.12)$$

$$G_{T'} = -\frac{1}{\lambda} \left\{ P_1(\cos \theta_\gamma) + 3 \left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-1} \right) P_3(\cos \theta_\gamma) \right\} \quad (6.13)$$

Termenul de interferență transversal longitudinal, care este liniar în ξ_λ este cel mai interesant. El poate fi izolat efectuând măsurători la $\phi_\gamma = 0^\circ$ și $\phi_\gamma = 180^\circ$ cu electroni nepolarizați

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_e d\Omega_\gamma} \right|_{\phi_\gamma=0^\circ}^{nopol} - \left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_e d\Omega_\gamma} \right|_{\phi_\gamma=180^\circ}^{nopol} / \left(\frac{\Gamma_\gamma^{\lambda^+ \rightarrow (\lambda-2)^+}}{\Gamma_{total}^{\lambda^+}} \right) 4\pi\sigma_{Mott} f_{rec}^{-1} = \\ & -\sqrt{2} \frac{q_\mu^2}{q^2} \sqrt{\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2}} G_{TL} \xi_\lambda \left(\langle I_f \parallel \hat{M}_\lambda(q) \parallel I_i \rangle \right)^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Deci, alegând valori convenabile care maximizează (6.14), este posibilă determinarea lui $\langle I_f \parallel \hat{M}_\lambda(q) \parallel I_i \rangle \langle I_f \parallel \hat{T}_\lambda^{el}(q) \parallel I_i \rangle$ pentru diferite valori ale lui q .

Să considerăm pentru ilustrare, studiul proceselor ($e, e'\gamma$) în care stările excitate sunt moduri colective vibraționale. Vom considera modelul picătură de lichid incompresibilă a cărui operator densitate este dat de

$$\hat{\rho}_N(\mathbf{r}) = \frac{3eZ}{4\pi R_0^3} \Theta \left[R_0 \left(1 + \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_{lm}^* \right) - r \right] \quad (6.15)$$

iar operatorul densitate de curent

$$\hat{\mathbf{J}}_N(\mathbf{r}) = \frac{3eZ}{4\pi R_0^3} \sum_{lm} \frac{1}{l} \dot{\alpha}_{lm} \left[\nabla \left(\frac{r}{R_0} \right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \Theta(R_0 - r) \quad (6.16)$$

Pentru tranziția la starea uni - surfon 2^+ , substituind (6.15) în expresia multipolului Coulombian (II.B.15)

$$\langle 2^+ \parallel \hat{M}_2(q) \parallel 0^+ \rangle = \frac{3eZ}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{2(B_2 C_2)^{1/2}}} j_2(qR_0) \quad (6.17)$$

unde B_2 și C_2 sunt definiți de (3.38) și (3.39). Deoarece câmpul de viteze în picătura de lichid se presupune a fi irotational, contribuția multipolului transversal este dată de (cf. (5.124)) de

$$\langle 2^+ \parallel \hat{T}_2^{el}(q) \parallel 0^+ \rangle = -\frac{\omega_2}{q} \sqrt{\frac{3}{2}} \langle 2^+ \parallel \hat{M}_2(q) \parallel 0^+ \rangle \quad (6.18)$$

cu ω_2 definit de (3.36)

$$\omega_2 \approx 36A^{-1/2} \text{MeV} \quad (6.19)$$

Facem observația că adoptând ansatzul (4.17) pentru multipolul transversal electric, partea de magnetizare (4.18) nu contribuie la (6.17). Pentru a adăuga componentele de

Figura 6.2: Deviația de la teorema lui Siegert, în cazul fără magnetizare (linie plină) și cu magnetizare nenulă $\mu \neq 0$ (linie punctată) pentru ^{16}O și ^{90}Zr .

magnetizare în expresia curentului (6.16), vom folosi modelul elementar pentru densitatea de magnetizare [deFW66]

$$\hat{\mu}_N(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{2mZ} \hat{\rho}_N(\mathbf{r}) \mathbf{L} \quad (6.20)$$

multipolul transversal electric

$$\langle 2^+ \parallel \hat{T}_2^{el}(q) \parallel 0^+ \rangle = -\frac{\omega_2}{q} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\mu}{Z} \frac{q^2}{2m\omega_2} \right) \langle 2^+ \parallel \hat{M}_2(q) \parallel 0^+ \rangle \quad (6.21)$$

Introducând cantitatea care definește depărtarea de la teorema lui Siegert, pe care am definit-o în capitolul precedent, și substituind (6.20) în (5.130), obținem

$$\eta_2(q) = 1 - \left(1 - \frac{\mu}{Z} \frac{q^2}{2m\omega_2} \right) \frac{\langle 2^+ \parallel \hat{M}_2(q) \parallel 0^+ \rangle}{\langle 2^+ \parallel \hat{M}_2(0) \parallel 0^+ \rangle} \quad (6.22)$$

Această cantitate se poate exprima în funcție de factorul de interferență (6.4) după cum urmează [Mi94a]

$$\eta_2(q) = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{q}{\omega_2} \xi_2(q) \frac{\langle 2^+ \parallel \hat{M}_2(q) \parallel 0^+ \rangle}{\langle 2^+ \parallel \hat{M}_0(q) \parallel 0^+ \rangle} \quad (6.23)$$

Dependența lui η_2 de transferul de impuls q este dată în fig.(6.2), pentru nucleele ^{16}O și ^{90}Zr în ambele cazuri : curgere irotatională pură și cu magnetizare nenulă ($\mu = 0.5$). Se observă că pentru nucleul ușor ^{16}O , contribuțiile de magnetizare au un efect sensibil,

în sensul de intensificare a deviației de la valabilitatea teoremei lui Siegert. Pentru nucleul ^{90}Zr , aceste contribuții sunt aproape indecelabile.

Am văzut în secțiunea precedentă că devierea de la teorema lui Siegert se mărește când trecem de la modelul IF la modelul RR. Deși natura fizică a curențului de magnetizare este diferită de cea a curențului de rotator rigid, faptul că din punct de vedere vectorial au o structură rotațională, implică același efect în ceea ce privește deviația de la teorema lui Siegert și deci intensificarea tranzițiilor toroidale.

Deasemenea se mai poate face observația că devierea de la teorema lui Siegert este mai puternică la nucleele grele decât la nucleele ușoare. Această ultimă concluzie este în concordanță cu afirmația pe care am făcut-o în legătură cu factorul de formă transversal electric al MDT și anume că efectul toroidal este intensificat în nucleele grele.

Anexa III.A

Ecuatiile Virialului

Să considerăm ca și în anexa II.A un fluid nuclear descris de densitatea $\rho(\mathbf{r}, t)$ și presiunea $p(\mathbf{r}, t)$. Presupunem că singurele forțe care influențează mișcarea acestui fluid, în afară de gradientul presiunii ∇p , este forța care derivă din potențialul electrostatic de respingere creat de cei Z protoni. În aceste condiții, ecuația hidrodinamică care guvernează mișcarea nucleonilor (II.A.1), exprimată într-un SI, devine

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial V^C}{\partial x_i} \quad (\text{III.A.1})$$

unde

$$V^C = k(Ze)^2 \int \frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{III.A.2})$$

este potențialul Coulombian, iar k constanta forței Coulombiene.

Avem de a face cu o problemă de același gen cu cea întâlnită în secțiunea 3.1, adică rezolvarea unei ecuații integro - diferențiale a fizicii matematice. Vom adopta aceeași metodă, adică considerarea diferitelor momente, prin multiplicarea succesivă a ecuației (III.A.1) cu 1, x_j , $x_j x_k$, etc., urmată de integrarea pe întregul volum V ocupat la un moment dat de fluid. Aceasta se mai numește și *metoda virialului*, iar ecuațiile de ordin inferior, așa cum am văzut în capitolul 3 al acestei lucrări, au de obicei interpretări simple.

III.A.1 Ecuatiile de ordinul întâi

Prin simpla integrare a ecuației (III.A.1), pe volumul ocupat de fluid se obțin ecuațiile de ordinul întâi. Folosind legea de conservare a masei fluidului în timpul mișcării

$$\frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{dM}{dt} = 0 \quad (\text{III.A.3})$$

obținem

$$\frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} \rho u_i = - \int_S p dS_i + k(Ze)^2 \int \int_V d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \frac{x_i - x'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{III.A.4})$$

unde dS_i este un element de volum al *suprafeței libere* care mărginește volumul V . Cele două integrale din membrul drept se anulează : prima datorită condiției ca presiunea să se anuleze pe suprafață, iar a doua integrală ca urmare a asimetriei integrandului în \mathbf{r} și \mathbf{r}' . Obținem finalmente

$$\frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} \rho u_i = \frac{d^2}{dt^2} \int_V d\mathbf{r} \rho x_i \quad (\text{III.A.5})$$

o ecuație care exprimă mișcarea uniformă a centrului de masă.

III.A.2 Ecuatiile de ordinul doi

Multiplicând (III.A.1) cu x_j , integrând pe tot volumul și introducând *tensorul energie cinetică*

$$\mathcal{T}_{ij} = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \rho u_i u_j \quad (\text{III.A.6})$$

a cărui urmă este egală cu energia cinetică totală a mișcării în sistem ¹, putem manipula termenul care apare în membrul stâng pentru a îl aduce la forma

$$\int_V d\mathbf{r} \rho \frac{du_i}{dt} x_j = \frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} \rho u_i x_j - 2\mathcal{T}_{ij} \quad (\text{III.A.7})$$

Primul termen din membrul drept va fi integrat prin părți

$$- \int_V d\mathbf{r} x_j \frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ij} \Pi \quad (\text{III.A.8})$$

iar al doilea va fi tensorul potențialului Coulombian

$$\mathcal{W}_{ij} = \int_V d\mathbf{r} \rho x_j \frac{\partial V^C}{\partial x_i} \quad (\text{III.A.9})$$

Combinând (III.A.7), (III.A.8) și (III.A.9) obținem

$$\frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} \rho u_i x_j = 2\mathcal{T}_{ij} + \mathcal{W}_{ij} + \delta_{ij} \Pi \quad (\text{III.A.10})$$

Cum toți tensorii din membrul drept al lui (III.A.10) sunt simetrici în i și j , partea antisimetrică a tensorului din membrul stâng trebuie să se anuleze

$$\frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} \rho (u_i x_j - u_j x_i) = 0 \quad (\text{III.A.11})$$

¹ $\text{Tr}\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \rho |\mathbf{u}|$

Ecuatia (III.A.11) exprimă conservarea momentului cinetic al sistemului.

În condiții staționare, ecuația (III.A.10) devine

$$2\mathcal{T}_{ij} + \mathcal{W}_{ij} = -\delta_{ij}\Pi \quad (\text{III.A.12})$$

Este interesant de văzut ce se întâmplă dacă fluidul nuclear se rotește uniform cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$. Pentru aceasta ne vom referi la ecuațiile de mișcare într-un sistem de referință care se rotește cu $\boldsymbol{\omega}$. Ecuatia (III.A.1) devine

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial V^C}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 + 2\rho \varepsilon_{ilm} u_l \omega_m \quad (\text{III.A.13})$$

unde $\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2$ și $2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ reprezintă potențialul centrifugal și accelerația Coriolis. Atunci în loc de ecuația (III.A.10) vom avea

$$\frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} \rho u_i x_j = 2\mathcal{T}_{ij} + \mathcal{W}_{ij} + \omega^2 I_{ij} - \omega_i \omega_k I_{kj} + \delta_{ij}\Pi + 2\varepsilon_{ilm} \omega_m \int_V d\mathbf{r} \rho u_l x_j \quad (\text{III.A.14})$$

unde

$$I_{ij} = \int_V d\mathbf{r} \rho x_i x_j \quad (\text{III.A.15})$$

este *tensorul moment de inerție*, care dă informații despre distribuția de masă.

În cazul stațional, ecuația (III.A.14) dă

$$2\mathcal{T}_{ij} + \mathcal{W}_{ij} + \omega^2 I_{ij} - \omega_i \omega_k I_{kj} + \delta_{ij}\Pi + 2\varepsilon_{ilm} \omega_m \int_V d\mathbf{r} \rho u_l x_j = 0 \quad (\text{III.A.16})$$

Capitolul IV

Concluzii

Așa cum am arătat la începutul acestei lucrări, obiectivul principal pe care l-am urmărit a fost de a studia acele mișcări colective care au o structură electromagnetică pur toroidală, sau să extragem contribuția toroidală în tranzițiile de tip electric în nucleele care prezintă un spectru mixt rotațional - vibrațional.

Considerând rezonanța gigant izoscalară 1^- MDT, am calculat pentru un grup de nuclee sferice (^{40}Ca , ^{90}Zr și ^{208}Pb), factorii de formă transversali și am subliniat deplasarea efectului toroidal spre transferuri de impuls mici când trecem la nuclee cu Z și A mari. Simultan are loc o intensificare a excitației dipol toroidale în nuclee grele. În urma calculului secțiunii de fotoabsorbție am afirmat că este foarte puțin probabilă excitarea MDT cu fotoni. În schimb este posibilă folosirea reacțiilor de împrăștiere inelastică a electronilor pe nuclee, deoarece acest gen de reacții permit pe de o parte varierea independentă a transferurilor de impuls și a energiei de excitație, iar pe de altă parte dau o dependență după unghiul de împrăștiere θ a secțiunii diferențiale. Cum MDT este o mișcare transversală asociată vârtejului inelar Hill, electroexcitarea la unghiuri de 180° pare a fi promițătoare deoarece modurile care ar putea concura, fiind în special de natură longitudinală, sunt suprimate. Deasemenea, am extras limita lungimilor de undă mari a multipolului transversal electric, și am arătat că acesta este proporțional cu momentul dipolar toroidal de tranziție. Această caracteristică dinamică asociată MDT, pentru transferuri de impuls mici, este liniară în αZ , ceea ce explică micimea efectelor toroidale pentru nuclee cu număr de protoni mici.

Am studiat și alt tip de rezonanțe gigant, dependente de spin (spin - flip), și am arătat că structura electromagnetică a acestora este pur toroidală, iar posibila lor investigare cu probe leptonice, trebuie făcută la unghiuri de 180° și transferuri de impuls mari. Aceste concluzii se sprijină pe calculul secțiunilor diferențiale corespunzătoare proceselor (e, e') de excitație a rezonanțelor Goldhaber - Teller și a modurilor de spin - flip electrice 1^- (s-is) în nucleele ^{12}C , ^{16}O , ^{40}Ca și ^{208}Pb .

În partea a doua lucrării ne-am concentrat atenția asupra contribuțiilor toroidale în excitarea stărilor din banda fundamentală a nucleelor pare din zona pământurilor rare (^{152}Sm , ^{166}Er). Am introdus o cantitate care descrie devierile de la teorema lui Siebert

sau, în optica noastră, contribuția termenilor de ordin superior în transferul de impuls în expresia multipolului transversal electric, adică momentele multipolare toroidale și razele lor pătratice medii. Pentru rotatorul rigid, care este un submodel al rotatorului Riemann, devierea de la teorema lui Siegert are o pantă mai mare decât cea corespunzătoare fluidului irotational. Am calculat momentul cuadrupolar toroidal de tranziție, și am arătat că acesta este o funcție monoton crescătoare de vorticitate. Acest fapt ne întărește convingerea că momentele toroidale de multipolaritate arbitrară sunt o măsură a intensității curenților electromagnetici vorticiali în același fel în care momentele multipolare de sarcină sunt asociate cu distribuția de sarcină sau curenții electromagnetici irotationali.

În reacții de retroîmprăștiere a electronilor, secțiunile diferențiale, de excitare a stărilor 2^+ și 4^+ din banda fundamentală a modelului rotatorului rigid, pot fi approximate luând în considerare numai factorii de formă toroidali, pentru un domeniu extins al transferului de impuls. Acest rezultat arată preponderența multipolilor toroidali față de cei Coulombieni la unghiuri de 180^0 , indiferent de transferul de impuls.

Am arătat că în reacții de coincidență $(e, e'\gamma)$, prin separarea termenului de interferență longitudinal transversal se poate măsura devierea de la teorema lui Siegert în cazul pur irotational și cu magnetizare nenulă. Pentru nuclee ușoare devierea de la teorema lui Siegert este mai puternică când există componente magnetice ale curenților nucleari.

Bibliografie

- [AD92] G.N.Afanasiev și V.M.Dubovik, *Electromagnetic properties of a toroidal solenoid*, J.Phys.A : Math.Gen. **25** (1992) 4869
- [ADM93] G.N.Afanasiev, V.M.Dubovik și Ș.Mișicu, *Explicit realizations of static and non-static solenoids and conditions for their existence*, J.Phys.A : Math.Gen. **25** (1992) 4869
- [Af91a] G.N.Afanasiev, *Aharonov -Casher effect for the toroidal solenoids*, preprint IUCN Dubna E2-91-543, 1991
- [Af91b] G.N.Afanasiev, *Toroidal solenoids in the electromagnetic field and Aharonov -Casher*, preprint IUCN Dubna E2-91-544, 1991
- [Af93] G.N.Afanasiev, *The static and nonstatic electric solenoids*, J.Phys.A : Math.Gen. **26** (1993) 731
- [Af94] G.N.Afanasiev, *Vector solutions of the Laplace equations and the influence of helicity on Aharonov - Bohm scattering*, J.Phys.A : Math.Gen. **27** (1994) 2143
- [AL82] S.M.Apenko și Yu.E.Loikov, *Parity nonconservation and anapoles*, J.Phys.B : At.Mol.Phys. **15** (1982) L57
- [AP80] A.Ahiezer și S.Peletminski, *Les Methodes de la Physique Statistique*, Mir, Moscova, 1980
- [AS64] M.Abramowitz și I.Stegun *Handbook of Mathematical Functions*, Nat.Bureau of Stand., Washington, 1964
- [As66] E.Ascher, *Some properties of spontaneous currents*, Helv.Phys.Acta **39** (1966) 40

- [BalMik88] E.B.Balbuşev şi I.N.Mikhailov, *Dynamics of nuclear integral characteristics*, J.Phys.G:Nucl.Part.Phys. **14**(1988) 545
- [BasMa90] S.I.Bastrukov şi J.A.Maruhn, *Fluid - Dynamics of the Nuclear Surface Fermi - Layer*, Z.Phys. **A325** (1990) 139
- [BasMiS93] S.I.Bastrukov, Ş.Mişicu şi A.V.Suşkov, *Dipole Torus Mode in Nuclear Fluid - Dynamics*, Nucl.Phys. **A562** (1993) 191
- [BB74] M.A.Bouchiat şi C.Bouchiat, *Weak neutral currents in atomic physics*, Phys.Lett.B **48**, no.2 (1974) 111
- [BD64] J.D.Bjorken şi S.Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw - Hill, New York, 1964
- [BDC72] R.Ă.Bluvştein, V.M.Dubovik şi A.A.Ceşkov, *Perehodnîie Toroidnîie formfactorî legkih yader*, Yad.Fiz. **15** (1972) 100
- [Be74] G.F.Bertsch, *Elasticity in the response of nuclei*, Ann. Phys. **86**(1974) 138
- [Be75] G.F.Bertsch, *Nuclear Hydrodynamics*, Nucl.Phys. **A249**(1975) 253
- [BenS81] A.Ben-Menahem şi J.Singh, *Seismic Waves and Sources*, Springer Verlag, Heidelberg(1981)
- [BG92] S.I.Bastrukov şi V.V.Gudkov, *The twist $M\lambda$, $T = 0$ giant modes in spherical nuclei*, Z.Phys. **A341** (1992) 359
- [BH91] F.Boudjema şi C.Hamzaoui, *Massive and massless Majorana particles of arbitrary spin : Covariant and gauge couplings and production properties*, Phys.Rev. **D43**, no.11 (1991) 3748
- [BHS91] E.R.Boston, A.C.Hartley şi P.G.H.Sandars, *Anapole moments in positronium*, J.Phys.B : At.Mol.Opt.Phys. **23** (1991) 2877
- [BK87] U.E.P.Berg şi U.Kneissl, *Recent progress on nuclear magnetic dipole excitations*, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci, **37** (1987) 33
- [BKZ79] L.M.Barkov, I.B.Khripolvici şi M.S.Zolotarev, *Parity violation in atomic transitions*, Comm.Atom.Mol.Phys. **8** no.3,4 (1979) 79
- [BM75] A.Bohr şi B.Mottelson, *Nuclear Structure*, Benjamin, New York, 1975

- [BP91] C.Bouchiat și C.A.Piketty, *Nuclear spin dependent atomic parity violation, nuclear anapole and the hadronic axial current*, Z.Phys.C - Particles and Fields **49** (1991) 91
- [Bo52] A.Bohr, *Theory of rotational states in atomic nuclei*, Matt.Fys.Medd.Dan. Vid.Selsk. **26**, no.14
- [Bou90] M.A.Bouchiat, *Atomic parity violation, a low energy test of the electroweak standard model*, Conference on Atomic Physics, Ann Arbor, Michigan, 1990
- [BS90] E.R.Boston și P.G.H.Sandars, *The anapole moments of hydrogenic atoms*, J.Phys.B : At.Mol.Opt.Phys. **23** (1982) 2663
- [BSMNS88] D.Berdichewsky, P.Sarriguren, E.Moya de Guerra, M.Nishimura și D.W.L.Sprung, *Collective rotational transverse current multipoles : even - even nuclei*, Phys.Rev. **C38**, no.1 (1988) 338
- [BW52] J.M.Blatt și V.F.Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Willey and Sons, New York, 1952
- [BZ77] N.M.Baranova și Ya.B.Zeldovici, *On the expansion of radiation intensity into (a/λ)* , Opt.Comm. **22** no.1 (1977) 53
- [BZ78a] L.M.Barkov și M.S.Zolotarev, *Observation of parity nonconservation in atomic transitions*, Pisma JETF **27**, n.6 (1978) 379
- [BZ78b] L.M.Barkov și M.S.Zolotarev, *Measurement of optical activity of bismuth vapor*, Pisma JETF **28**, n.8 (1978) 544
- [Cab90] J.A.Caballero, *Estudio de la influencia de la deformacion nuclear en el proceso de dispersion cuasi-elastica de electrones per nucleos*, Teză de doctorat, Universidad autonoma de Madrid, 1990
- [Ce66] A.A.Ceșkov, *Invariantnaya parametrizația proizvedenii lokalnih operatorov*, JETF **50** (1966) 144
- [Ch61] S.Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford, 1961
- [Ch69] S.Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Yale Univ. Press, New Haven, 1969

- [CM64] F.Curtis Michel, *Parity nonconservation in nuclei*, Phys.Rev. **133**, no.2B (1964) 329
- [CS62] A.A.Ceşkov şi Yu.M.Şirokov, *Invariantnaya parametrizația relativistkoi matriți rasseyaniya*, JETF **42** (1962) 144
- [CS63] A.A.Ceşkov şi Yu.M.Şirokov, *Invariantnaya parametrizația lokalnih operatorov*, JETF **44** (1963) 1982
- [Cus68] R.Y.Cusson, *A study of collective motion : Rigid, liquid and related rotations*, Nucl.Phys. **A114** (1968) 289
- [DC66a] V.M.Dubovik şi A.A.Ceşkov, *Formfaktorî i multipoli vî elektromagnitih sil vzaimodeistviah*, JETF **51** (1966) 1369
- [DC66b] V.M.Dubovik şi A.A.Ceşkov, *Uprugoe ed - rasseyanyie i naruşenie CP - invariantnosti*, JETF **51** (1966) 165
- [DC70a] V.M.Dubovik şi A.A.Ceşkov, *Multipolnoe razlojenie toka vî klasiceskoi elektrodinamike I*, preprint IUCN Dubna, P2-5283, 1970
- [DC70b] V.M.Dubovik şi A.A.Ceşkov, *Izluceniê toroidnîm momentami vî klasiceskoi elektrodinamike II*, preprint IUCN Dubna, P2-5284, 1970
- [DC74] V.M.Dubovik şi A.A.Ceşkov, *Multipolnoe razlojenie vî klasiceskoi i vî kvantovoi teorii polya i izlucenie*, El.Ciast.At.Yadra **5** (1974) 791
- [DET76] V.M.Dubovik, R.A.Eramjian şi L.A.Tosunian, *On hindered transitions in nuclei used for observation of P- violating effects in the weak interactions of nuclei*, preprint IUCN Dubna, E4-9979, 1979
- [DLC67] V.M.Dubovik, E.P.Likhtman şi A.A.Ceşkov, *Uprugoe ed - rasseyanyie i naruşenie CP - invariantnosti*, JETF **52** (1967) 464
- [DLM92] V.M.Dubovik, I.V.Lunegov şi M.A.Marţeniuk, *Toroidniê возбужденые ядерного магнитого резонанса*, preprint IUCN Dubna, P14-92-321, 1992
- [DMM92] V.M.Dubovik, M.A.Marţeniuk şi N.M.Marţeniuk, *Peremagnichenie agregatov magnitih ciastih vîhrevîm polem i ispolzovanie toroidnosti dlya zapisi informacii*, preprint IUCN Dubna, P17-92-541, 1992

- [Do70] T.W.Donnely, *Excitation of $T = 1$ particle-hole states in ^{12}C by inelastic electron scattering*, Phys.Rev. **C1**, no.2 (1970) 833
- [DoRa86] T.W.Donnely și A.S.Raskin, *Considerations of polarization in inclusive electron scattering from nuclei*, Ann.Phys.**169** (1986) 247
- [DoRaD87] T.W.Donnely, A.S.Raskin și J.Dubach, *Prospects for using the $(e, e'\gamma)$ reaction to explore the nuclear structure*, Nucl.Phys.**A474** (1987) 307
- [DoWa70] T.W.Donnely și G.E.Walker, *Inelastic electron scattering and supermultiplets in the particle-hole model for ^{12}C , ^{16}O , ^{28}Si , ^{32}S and ^{40}Ca* , Ann.Phys. **60** (1970) 209
- [DP83] Nguyen Dinh Dang și V.Yu.Ponomarev, *Vlyianie spinovîh komponentov ostatochnîh sil na svoistva sostoianii elektriceskogo tipa vî sfericeskîh yadra*, Izv.Akad.Nauk **47**, n.11 (1983) 2147
- [DS84] T.S.Dumitrescu și T.Suzuki, *Spin distributions in the vibrational excitations of closed-shell nuclei*, Nucl.Phys. **A423** (1984) 277
- [DT83] V.M.Dubovik, și L.A.Tosunyan, *Toroidnîe Momentî vî fizika electromagnitîh i slabîh vzaimodeistvyi*, Fiz.El.Ciast.At.Yadra, **14**, n.5 (1983) 1193
- [DT90] V.M.Dubovik, și V.V.Tugushev, *Toroid moments in electrodynamics and solid state physics*, Phys.Rep. **187**, no.4 (1990) 145
- [DTT86] V.M.Dubovik, L.A.Tosunyan și V.V.Tugushev, *Axial toroid moments in electrodynamics and solid state physics*, Sov.Phys.JETP **63**, no.2 (1986) 344
- [Dub75] V.M.Dubovik, *The Thomas - Reiche - Kuhn sum rule and the toroid moments*, preprint IUCN-Dubna, E2-9262, 1975
- [DW75] T.W.Donnely și J.D.Walecka, *Electron scattering and nuclear structure*, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. **25** (1975) 329
- [Edm60] A.R.Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960
- [EG70a] J.M.Eisenberg și W.Greiner, *Nuclear Theory, vol.II : Nuclear Models*, North-Holland, Amsterdam, 1970

- [EG70b] J.M.Eisenberg și W.Greiner, *Nuclear Theory, vol.II : Excitation Mechanisms of the Nucleus*, North-Holland, Amsterdam, 1970
- [EGK80] R.A.Eramjian, M.Gmitro și H.R.Kissener, *Giant $M2$ and transversal $E1$ resonances in light nuclei*, Nucl.Phys. **A338** (1980) 436
- [El46a] W.E.Elssasser, *Induction effects in terrestrial magnetism I. Theory*, Phys.Rev. **69**, no.3,4 (1946) 106
- [El46b] W.E.Elssasser, *Induction effects in terrestrial magnetism II. The secular variation*, Phys.Rev. **70**, no.3,4 (1946) 202
- [Ell63] J.P.Elliott, *The nuclear shell model and its relation with other nuclear models*, în *Selected Topics in Nuclear Theory*, IAEA, Vienna, 1963
- [FF84] J.L.Friar și S.Fallieros, *Extended Siegert Theorem*, Phys.Rev. **C29**, no.5 (1984) 1645
- [FH85] J.L.Friar și W.C.Haxton, *Current conservation and the transverse electric multipole field*, Phys.Rev. **C31**, no.6 (1985) 2027
- [FK80] V.V.Flambaum și I.B.Khriplovici, *P - necetnîe yadernîe sil - istocinik narușeniya vî atomah*, JETF **79** (1980) 1656
- [FKS84] V.V.Flambaum și I.B.Khriplovici și O.P.Sușkov, *Nuclear anapole moments*, Phys.Lett.B **146**, no.6 (1984) 367
- [deFW66] T.de Forest și J.D.Walecka, *Electron Scattering and Nuclear Structure*, Adv.Phys. **15**, no.57(1966) 1
- [Gaa.et al.81] C.Gaarde și al., *Excitation of giant spin-izospin multipole vibrations*, Nucl.Phys. **A369** (1981) 258
- [GDM90] C.Garcia-Recio, T.W.Donnely și E.Moya de Guerra, *Studies of $(\vec{e}, e'\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2 \cdot \cdot)$ reactions and electromagnetic currents in rotational nuclei*, Nucl.Phys. **A509** (1990) 221
- [GGKV84] V.L.Ginzburg, A.A.Gorbațevici, Yu.V.Kopaev și B.A.Volkov, *On the problem of superdiamagnetism*, Solid State Comm., **50** no.4 (1984) 339
- [GHW59] A.E.Glassgold, W.Heckrotte și K.M.Watson, *Collective excitations of nuclear matter*, Ann.Phys. **6** (1959) 1

- [Gil74] R.Gilmore, *Lie groups, Lie algebras and some of their representations*, John Willey and Sons, New York, 1974
- [GMS58] I.M.Ghelfand, R.A.Minlos și Z.Ya.Shapiro, *Predstavleniya gruppî vrazşeniya i gruppî Lorenţa*, Fizmatgiz, Moscova, 1958
- [Gol59] H.Goldstein, *Classical Mechanics*, ed 2-a, Addison Wesley, Reading Massachussetes, Cambridge, 1959
- [GR76] P.Gulshani și D.J.Rowe, *Collective motions in nuclei and the spectrum generating algebras $T_5 \times SO(3)$, $GL(3, R)$* , Canad.J.Phys. **54** (1976) 970
- [GT85] V.L.Ginzburg și V.N.Ţitovici, *Poliya i izlucenie toroidnîh dipolnîh momentov, ravnomerno dvijuşcihsia vî srede*, JETF **88** no.1 (1985) 84
- [GTBW63] J.Goldenberg, Y.Torizuka, W.C.Barber și J.D.Walecka, *Excitation of the electric dipole giant resonace by inelastic electron scattering at 180°* , Nucl.Phys. **43** (1963) 242
- [Har81] M.N.Harakeh, raport intern KVI *Bel 77i* (1981)
- [HB83] J.Heisenberg și H.P.Block, *Inelastic Electron Scattering from Nuclei*, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. **33** (1983) 569
- [HE79] G.Holzwarth și G.Eckart, *Fluid - Dynamical approximation for finite Fermi systems*, Nucl.Phys. **325**(1979) 1
- [HGWL82] R.W.Hasse, G.Ghosh, T.Winter și A.Lumbroso, *Isoscalar giant resonances energies and long - mean - free path nuclear fluid dynamics*, Phys.Rev **C25**, no.5(1982 2771)
- [HHM89] W.C.Haxton, E.M.Henley și M.J.Musolf *Nucleon and nuclear anapole moments*, Phys.Rev.Lett. **63**, no.9 (1989) 949
- [IZ80] C.Itzykson și J.B.Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw - Hill, New York, 1980
- [Ja75] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics*, ed. 2-a, John Willey and Sons, New York, 1975
- [KB62] L.P.Kadanoff și G.Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, Benjamin, New York, 1962

- [Khr90] I.B.Khriplovici, *Parity nonconservation in atomic phenomena*, Gordon and Breach Sci.Pub., Philadelphia, 1990
- [KP89] M.G.Kozlov și S.G.Porsev, *The possibility to study the break of time invariance in atoms*, Phys.Lett.A **142** no.4,5 (1989) 233
- [KP90] I.B.Khriplovici și M.E.Pospelov, *Anapole moment of a chiral molecule*, Z.Phys.D : Atoms, Molecules and Clusters, **17** (1990) 81
- [KT86] S.S.Krotov și V.V.Tugușev, *Pseudoproper toroidal ordering in antiferromagnetism*, Sov.Phys.JETP, **64** no.5 (1986) 1010
- [KW83] W.E.Kleppinger și J.D.Walecka, *The theory of electron scattering coincidence experiments*, Ann.Phys.**146** (1983) 349
- [Lam57] H. Lamb, *Hydrodynamics*, ed.6-a, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957
- [Lew93] R.R.Lewis, *Anapole moments of atoms*, Phys.Rev. **A48**, no.6, (1993) 4107
- [LGF81] M.A.Listengarten, V.N.Grigoriev și A.P.Feresin, *Vnutreniyaya konversiya γ lucei i toroidnîe momentî yader*, Izv.Akad.Nauk **45**, n.11 (1981) 2038
- [LL88] L.D.Landau și E.M.Lifșitș, *Teoreticheskaya Fizika VII : Ghidrodinamica*, Nauka, Moscova, 1988
- [LL89] L.D.Landau și E.M.Lifșitș, *Teoreticheskaya Fizika III : Kvantovaya Mehanika*, Nauka, Moscova, 1989
- [Lo27] A.E.H.Love, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, ed.4, Dover Publication, New York, 1927
- [LS78] V.L.Lyuboșitș și Ya.A.Smorodinskii, *The Aharonov - Bohm in a toroidal solenoid*, Sov.Phys.JETP **48**, no.1 (1978) 19
- [Mac68] G.W.Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1968
- [MDDPKB94] M.J.Musolf, T.W.Donnely, J.Dubach, S.J.Pollock, S.Kowalski și E.J.Beise, *Intermediate - energy semileptonic probes of the hadronic neutral current*, Phys.Rep. **239**, (1994) 1
- [Mes63] A. Messiah, *Mecanique Quantique, tom I*, Dunod, Paris, 1963

- [Mes64] A. Messiah, *Mecanique Quantique, tom II*, Dunod, Paris, 1964
- [MF52] P.M.Morse și H.Feschbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw - Hill, New York, 1952
- [Mi92] Ș.Mișicu, *Classical radiation of toroidal dipole moment*, Rom.J.Phys. **37** no.9 (1992) 855
- [Mi94a] Ș.Mișicu, *Toroidal multipole transitions in collective excitations of atomic nuclei*, în *Frontier Topics in Nuclear Physics*, p.262, ed.W.Scheid și A.Săndulescu, Plenum Press, New York, 1994
- [Mi94b] Ș.Mișicu, *Toroidal quadrupole transitions in electro-excitation of atomic nuclei*, în *Selected Topics on Nuclear Structure, Dubna, 5-9 July*, pag.77, ed.V.G.Soloviov, K.Ya.Gromov și L.A.Malov, vol.1(1994).
- [Mi95] Ș.Mișicu, *Toroidal quadrupole transitions associated to rotational - vibrational motions of the nucleus*, J.Phys.G:Nucl.Part.Phys. **21** (1995) 669
- [Mil84] M.A.Miller, *Zariadovaya i tokovaya elektrostatika*, Usp.Fiz.Nauk **142** (1984) 147
- [Mil86] M.A.Miller, *Neodnoznacnosti obratnih zadaci v makroelektrodinamike. Sfericeskie i toroidalnue istociniki elektromagnitih polei*, Radiofizika **29** (1986) 991
- [Mos74] A.N.Moskalev, *Parity nonconservation effects due to neutral weak currents in mesic atoms*, JETP Lett. **19**, no.6 (1974) 216
- [MOS66] W.Magnus, F.Oberhettinger și Raj Pal Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer Verlag, Berlin, 1966
- [Moy86] E.Moya de Guerra, *Rotational nuclear models and electron scattering*, Phys.Rep. **138**, no.6 (1986) 293
- [MP89] A.N.Moskalev și S.G.Porsev, *Vliyanie T- necetnih yadernih sil na atomnue urovnii* Yad.Fiz. **49** (1989) 1266
- [MRK76] A.N.Moskalev, R.M.Rîndin și I.B.Khriplovici, *Vozmojnosti izuceniya slabih vzaimodeistviya v atomnoi fizike*, Usp.Fiz.Nauk **118** (1976) 409

- [MT68] L.M.Milne-Thompson, *Theoretical Hydrodynamics*, ed. 5-a, Macmillan, Londra, 1968
- [NMW88] M.C.Noecker, B.P.Masterson și C.E.Masterson, *Precision measurements of parity nonconservation in Atomic Cesium*, Phys.Rev.Lett. **61**, no.3 (1988) 310
- [NS80] J.R.Nix și A.J.Sierk, *Macroscopic description of isoscalar giant multipole resonances*, Phys.Rev. **C21**, no.1(1980) 396
- [NY81] Yu.V.Novojilov și Yu.A.Yappa, *Electrodynamics*, Nauka, Moscova, 1981
- [PVSD84] V.Yu.Ponomarev, A.I.Vdovin, V.M.Șilov, Nguyen Dinh Dang, *Transversal E1-resonance in spherical nuclei*, Phys.Scripta, **30** (1984) 238
- [RaDo89] A.S.Raskin și T.W.Donnely, *Polarization in coincidence electron scattering from nuclei*, Ann.Phys.**191** (1989) 78
- [RiSc80] P.Ring și P.Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer Verlag, Heidelberg, 1980
- [Ro55] M.E.Rose, *Multipole Fields*, John Willey and Sons, New York, 1955
- [Ro57] M.E.Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Willey and Sons, New York, 1957
- [Ros88] G.Rosensteel, *Rapidly rotating nuclei as Riemann ellipsoids*, Ann.Phys. **186** (1988)230
- [Ros90] G.Rosensteel *Transverse Form Factors in the Riemann Rotational Model*, Phys.Rev. **C41**, no.3 (1990) R811
- [Ros92b] G.Rosensteel *Dynamical Symmetry of Rotating Systems*, in *Symmetry in Physics*, ed. K.B.Wolf and A.Frank, Springer Verlag, Berlin, 1992
- [Ros92a] G.Rosensteel, *Sp(3,R) Tensors in Nuclear Physics* in *Group Theory and Special Symmetries in Nuclear Physics*, ed. J.P.Draayer and J.Janecke, World Scientific, Singapore, 1992
- [Ros92c] G.Rosensteel, *Self-Consistent anisotropic oscillator with cranked angular vortex velocities*, Phys.Rev. **C46**, no.5 (1992) 1818

- [Row70a] D.J.Rowe, *Nuclear Collective Motion*, Methuen, London, 1970
- [Row70b] D.J.Rowe, *How do deformed nuclei rotate ?*, Nucl.Phys. **A152** (1970) 273
- [Row85] D.J.Rowe, *Microscopic theory of the nuclear collective model*, Rep.Progr.Phys. **48** (1985) 1419
- [Row88] D.J.Rowe, *Vorticity in nuclear collective motion*, în *Microscopic Models in Nuclear Structure Physics*, World Scientific, Singapore, 1989
- [RR76a] G.Rosensteel și D.J.Rowe, *The principal series of $Sp(n,R)$* , Int.J.Th.Phys. **15**, no.6 (1976) 453
- [RR76b] G.Rosensteel și D.J.Rowe, *The Algebraic $CM(3)$ Model*, Ann.Phys **96** (1976) 1
- [RR77a] G.Rosensteel și D.J.Rowe, *The nuclear $Sp(3,R)$ Model*, Phys.Rev.Lett. **38** (1977) 10
- [RR77b] G.Rosensteel și D.J.Rowe, *The Nuclear collective model and the symplectic group*, în *Group Theoretical Methods in Physics*, ed.P.Kramer, 1977
- [RR77c] G.Rosensteel și D.J.Rowe, *The discrete series of $Sp(n,R)$* , Int.J.Th.Phys. **16**, no.1 (1977) 63
- [RR79] G.Rosensteel și D.J.Rowe, *On the Algebraic Formulation of Collective Models.I: The mass quadrupole collective model*, Ann.Phys **123** (1979) 1
- [RR80] G.Rosensteel și D.J.Rowe, *On the Algebraic Formulation of Collective Models.II: Collective and intrinsic submanifolds*, Ann.Phys **126** (1980) 1
- [RSWPW87] D.G.Ravenhall, R.L.Schult, J.Wambach, C.N.Papanicolas și E.Williamson, *Coincident electron scattering in DWBA I. The $(e, e'\gamma)$ process*, Ann.Phys.**178** (1987) 187
- [RW87] D.G.Ravenhall și J.Wambach, *Nuclear transition currents and vorticity*, Nucl.Phys. **A475** (1987) 468
- [Sa53] R.G.Sachs, *Nuclear Theory*, Addison Wesley, Reading Massachussetes, Cambridge, 1953
- [San93] P.G.H.Sandars, *P and/or T violation*, Phys.Scr. **46** (1993) 16

- [SDSD83] F.E.Serr, T.S.Dumitrescu, T.Suzuki și C.H.Dasso, *Microscopic description of current distributions for collective excitations in spherical nuclei*, Nucl.Phys. **404** (1983) 359
- [Sem81] S.F.Semenko, *O vîhrevîh volnah vî atomnîh yadrah*, Yad.Fiz. 34 (1981) 639
- [SGSMB89] P.Sarriguren, E.Graca, D.W.L.Sprung, E.Moya de Guerra și D.Berdichewsky, *Electromagnetic form factors of odd-A rotational nuclei*, Phys.Rev. **C40**, no.3 (1989) 1414
- [Shi51] Yu.M.Șirokov, *Relativistkaya teoriya spina*, JETF **21** (1951) 748
- [Shi54a] Yu.M.Șirokov, *O novom relativistiĭkih uravnenii dlya elementarnîh ciastiĭ*, Dokl.Akad.Nauk SSSR **XCIV**, no.5 (1954) 857
- [Shi54b] Yu.M.Șirokov, *K voprosu o vzaimodeistvii ciastiĭ novogo tipa spina 1/2 c vneșîm polem*, Dokl.Akad.Nauk SSSR **XCIX**, no.5 (1954) 737
- [Shi57a] Yu.M.Șirokov, *Teoretiko - grupovoe rasmotrenie osnov relativistkoi kvantovoi mehaniki I : Obșcie svoistva neodnorodnoi gruppî Lorența*, JETF **33** (1957) 861
- [Shi57b] Yu.M.Șirokov, *Teoretiko - grupovoe rasmotrenie osnov relativistkoi kvantovoi mehaniki II : Klasificația neprivodimîh predstavlenii neodnorodnoi gruppî Lorența*, JETF **33** (1957) 1196
- [Shi57c] Yu.M.Șirokov, *Teoretiko - grupovoe rasmotrenie osnov relativistkoi kvantovoi mehaniki III : Neprivodimîe predstavlenie klassu P_0 i O_0 i nepolnî privodimîe predstavlenie neodnorodnoi gruppî Lorența*, JETF **33** (1957) 1208
- [Shi58] Yu.M.Șirokov, *Relativistkaya teoriya polarizaționîi efektov*, JETF **35** (1958) 1005
- [Str41] J.A.Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw - Hill, New York, 1941
- [Ub65] H.Uberall, *Collective nuclear vibrations induced by high-energy neutrinos*, Phys.Rev. **C137** (1965) 502
- [Ub66] H.Uberall, *The giant resonance in inelastic electron scattering*, Il Nuovo Cimento, vol.41B, no.1 (1966) 217

- [Ub71] H.Uberall, *Electron Scattering from Complex Nuclei, Part A*, Academic Press, N.Y., 1971
- [Ui70] H.Ui, *Quantum mechanical rigid rotator with an arbitrary deformation*, Progr.Theor.Phys. **44** (1970) 153
- [UU69] H.Uberall și P.Ugincius, *Elastic and inelastic electron scattering from nuclear multipole moments in the first - order Born Approximation*, Phys.Rev. **178**, no.4 (1969) 1565
- [Ta56] L.J.Tassie *A model nuclear shape oscillations for γ - transitions and electron excitations*, Austr.J.Phys. **9** (1956) 407
- [TF86] V.V.Tuguşev și T.N.Fursa, *Toroidal collective excitations and the optical properties of crystals*, Sov.Phys.JETP **63**, no.3 (1990) 571
- [TS90] N.A.Tolstoy și A.A.Spartakov, *Spinovîe toroidpodobnîe stroienie peremagnice-nie agregatov*, Pisma JETF **51**, no.3 (1990) 796
- [VGK84] B.A.Volkov, A.A.Gorbaţevici și Yu.V.Kopaev, *Diamagnetic anomalies in sytems with spontaneous toroidal current*, Sov.Phys.JETP, **59** no.5 (1984) 1087
- [Vil57a] F.Villars, *A note on rotational energy levels in nuclei*, Nucl.Phys. **3** (1957) 240
- [Vil57b] F.Villars, *The collective model of nuclei*, Ann.Ren.Nucl.Sci. **7** (1957) 185
- [VMH75] D.A.Varshalovitch, A.N.Moskalev și V.K.Hersonskii, *Kvatovaya Teoriya Uglovogo Momenta*, Nauka, Sankt-Petersburg, 1975
- [WB72] L.Weaver și L.C.Bidenharn, *Rotational bands and $SL(3,R)$ symmetry*, Nucl.Phys. **A185** (1972) 1
- [WBC73] L.Weaver, L.C.Biedenharn și R.Y.Cusson, *Rotational bands in nuclei as induced group representations*, Ann.Phys. **77** (1973) 250
- [WCB76] O.L.Weaver, R.Y.Cusson și L.C.Biedenharn, *Nuclear rotational-vibrational collective motion with nonvanishing vortex spin*, Ann.Phys **102** (1976) 493
- [Wey50] H.Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, ed.4, Dover Publication, New York, 1950

-
- [Wig37] E.P.Wigner *On the consequences of the symmetry of the nuclear hamiltonian on the spectroscopy of nuclei*, Phys.Rev. **51** (1937) 106
- [Wo80] N.M.J.Woodhouse, *Geometric Quantization*, Oxford Univesity Press, New York, 1980
- [Wyb74] B.G.Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, John Willey and Sons, New York, 1974
- [Zel57] Ya.B.Zeldovici, *Elektromagnitîe vzaimodeistvie c nesohranenie cetnosti*, JETP **33** (1957) 1531
- [ZP60] Ya.B.Zeldovici și A.M.Perelomov, *Vliyanie slabogo vzaimodeistvie na elektromagnitîe svoistva ciastiț*, JETP **39** (1960) 1115